Politechnika Wrocławska

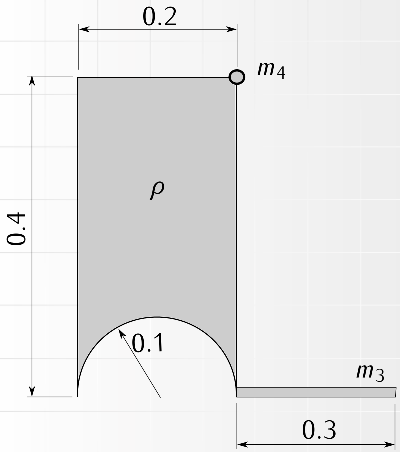
Przykładowe obliczeń momentów bezwładności i dewiacji

Daniel Lewandowski

19 czerwca 2020

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Treść zadania

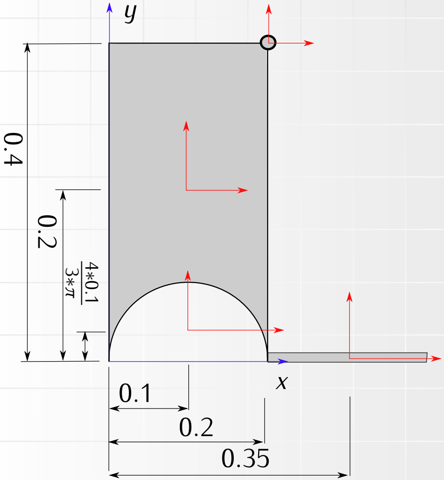


Układ ciał materialnych pokazanych na rysunku składa się z:

- płyty prostokątnej z wycięciem półkolistym (o gęstości powierzchniowej $\rho = 300\ kg/m^2$
- pręta masie $m_3 = 5kg$
- masy punktowej masie $m_4 = 4\ kg$

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności oraz pokazać ich osie. Odległości podano w metrach.

Środki ciężkości – położenie osi centralnych – 1



W pierwszym etapie szukamy środków ciężkości. W tym celu wykorzystujemy wzory na momenty statyczne. Całkowity moment statyczny, dla całej figury liczymy jako złożenie momentów od pojedynczych brył. Płytę traktujemy jak złożenie dwóch obiektów: płytę prostokątną o dodatnim momencie oraz wycinek półkolisty o ujemnym momencie.

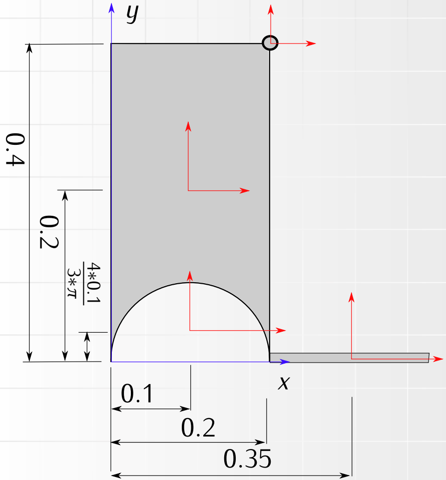
$$S_x = \sum S_{xi}, \quad S_y = \sum S_{yi} \tag{1}$$

Poszczególne momenty statyczne liczymy wg. wzoru:

$$S_x = m x_c \tag{2}$$

gdzie m – oznacza masę danego ciała a x_c położenie środka ciężkości w wybranym układzie.

Środki ciężkości – położenie osi centralnych – 2



Na rysunku zaznaczono dla każdej z figur lokalne środki ciężkości (czerwone) i ich położenie w globalnym układzie współrzędnych (niebieski). Wyrażenie na położenie środka ciężkości względem osi y przyjmuje następującą postać:

$$x_c = \frac{m_1 x_{c1} - m_2 x_{c2} + m_3 x_{c3} + m_4 x_{c4}}{m_1 - m_2 + m_3 + m_4} \tag{3}$$

a względem osi x :

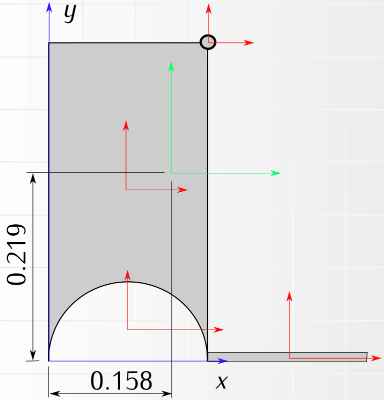
$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} - m_2 y_{c2} + m_3 y_{c3} + m_4 y_{c4}}{m_1 - m_2 + m_3 + m_4} \tag{4}$$

Masę płyty liczymy wykorzystując gęstość ρ:

$$m = \rho * A \tag{5}$$

gdzie: A oznacza powierzchnię.

Środki ciężkości – położenie osi centralnych – 3



$m1 = 0.2 * 0.4 * 300 = 24$

$m2 = (\Pi * 0.1^2) * 0.5 * 300 = 4.71$

$m3 = 5$

$m4 = 4$

$yc1 = 0.2$

$yc2 = \frac{4}{3} * \frac{0.1}{\Pi} = 0.0424413$

$yc3 = 0$

$yc4 = 0.4$

$xc1 = 0.1$

$xc2 = 0.1$

$xc3 = 0.35$

$xc4 = 0.2$

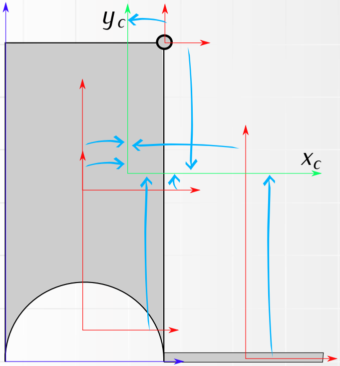
Korzystając z powyższych danych i wzorów 3 i 4 otrzymano:

$xc = 0.158329$

$yc = 0.219177$

Osie naniesiono na rysunek (zielony kolor).

Momenty bezwładności – 1

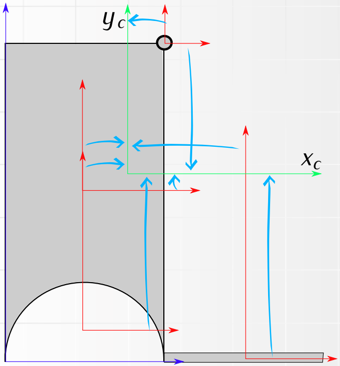


Momenty bezwładności i dewiacji, dla całego układu, wyznaczamy jako sumę momentów od poszczególnych obiektów względem nowych osi centralnych :

$$J_{xc} = \sum J_{xci}, \quad J_{yc} = \sum J_{yci}, \quad D_{xcyc} = \sum D_{xcyci} \tag{6}$$

Momenty bezwładności dla poszczególnych brył względem ich własnych centralnych osi centralnych bierzemy z tablic (np.: https://kmim.wm.pwr.edu.pl/lewandowski/wp-content/uploads/sites/6/2015/04/tablica_momenty.pdf).
Przesunięcia między centralnymi osiami lokalnymi (czerwone) i centralną osią globalną (zielona) dokonujemy z twierdzenia Steinera. Strzałki na rysunku pokazują przesunięcia.

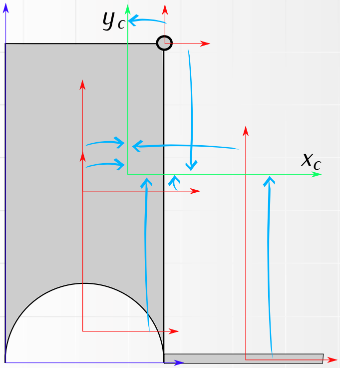
Momenty bezwładności - 2



$$J_{xc} = \frac{m1*0.4^2}{12} + m1*(yc - yc1)^2 +$$
$$-\left(m2*0.1*\left(0.25 - \frac{16}{9*Pi^2}\right) + m2*(yc - yc2)^2\right) +$$
$$+0 + m3*(yc - yc3)^2 +$$
$$+0 + m4*(yc - yc4)^2 = 0.519$$

$$J_{yc} = \frac{m1*0.4^2}{12} + m1*(xc - xc1)^2 +$$
$$-\left(\frac{m2*0.1^2}{4} + m2*(xc - xc2)^2\right) +$$
$$\frac{m3*4}{12} + m3*(xc - xc3)^2 +$$
$$+0 + m4*(xc - xc4)^2 = 2.231$$

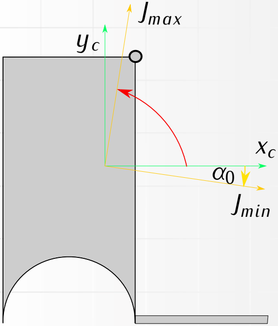
Momenty dewiacji - 1



Przy obliczaniu momentu dewiacji stosujemy także tw. Steinera. Aby zachować poprawność znaków w członie przesunięcia zachowujemy kolejność $x_c - x_{c1}$. Odejmujemy od współrzędnej osi całości współrzędne osi danego obiektu. Dla prostokąta $x_{c1} = 0.1$ a $x_c = 0.158$ co daje przesunięcie na plusie 0.058. Jest to zgodne z naszą konwencją ponieważ przesuwany się w prawo (plus - zgodnie ze zwrotem osi x). Dla punktu materialnego będzie to przesunięcie na minus.

$D_{xcyc} = 0 + \mathrm{m1} * (\mathrm{xc} - \mathrm{xc1}) * (\mathrm{yc} - \mathrm{yc1}) +$
$-(0 + \mathrm{m1} * (\mathrm{xc} - \mathrm{xc2}) * (\mathrm{yc} - \mathrm{yc2})) +$
$0 + \mathrm{m3} * (\mathrm{xc} - \mathrm{xc3}) * (\mathrm{yc} - \mathrm{yc3}) +$
$0 + \mathrm{m4} * (\mathrm{xc} - \mathrm{xc4}) * (\mathrm{yc} - \mathrm{yc4}) = -0.153$

Główne osi i momenty



Obliczenia centralnych głównych momentów bezwładności wykonujemy z gotowych wzorów na transformację obrotową:

$$J_{max} = 0.5 * ((Jxc + Jyc) + \sqrt{(Jxc - Jyc)^2 + 4 * Dxcyc^2}) = 2.245$$

$$J_{min} = 0.5 * ((Jxc + Jyc) - \sqrt{(Jxc - Jyc)^2 + 4 * Dxcyc^2}) = 0.506$$

$$\alpha_0 = 0.5 * \mathrm{ArcTan}\left[\frac{-2*\mathrm{Dxcyc}}{\mathrm{Jxc}-\mathrm{Jyc}}\right] = -5.071^o$$

Ponieważ kąt α_0 jest ujemny to obracamy układ w przeciwną stronę niż wyprowadzany był wzór na transformację obrotową. Która z osi jest osią maksymalnego momentu rozstrzygamy na podstawie wartości momentu dewiacji przed obróceniem układu. Ponieważ moment dewiacji był ujemny oś maksymalnego momentu tworzy z osią x_c kąt ostry – co oznaczono na rysunku czerwoną strzałką.