Politechnika Wrocławska

Geometria mas
Transformacja obrotowa momentów bezwładności
Osie główne

Daniel Lewandowski

20 maja 2020

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Gdy nie wszystko się składa ...

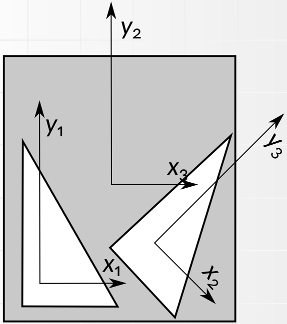
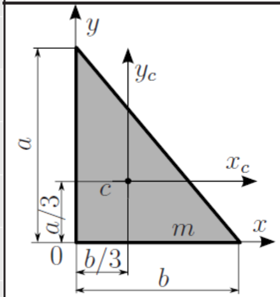
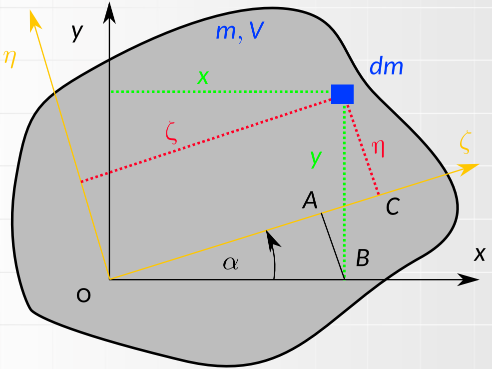


Figura	Wartości
	$J_{x_c} = \frac{ma^2}{18}$ $J_{y_c} = \frac{mb^2}{18}$ $J_x = \frac{ma^2}{6}$ $J_y = \frac{mb^2}{6}$ $D_{xy} = \frac{mab}{12}$ $D_{x_c y_c} = -\frac{mab}{36}$

Obrót układu współrzędnych

- Zakładamy podstawowy układ współrzędnych o osiach *x*, *y*.
- Wokół punktu o wykonujemy obrót. Nazywany go nowym układem o osiach ζ, η.
- Bryła pozostaje nieruchoma. Analizujemy odległości do punktu *dm* - jednego wybranego w bryle.



Związki pomiędzy współrzędnymi:

$$\begin{aligned} \zeta &= y \sin\alpha + x\cos\alpha \\ \eta &= y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie α jest kątem obrotu jednego układu względem drugiego.

Moment bezwładności dla osi O_ζ

Pamiętając o momentach bezwładności względem osi układu x, y:

$$I_x = \int y^2 \,\mathrm{d}m, \quad I_y = \int x^2 \,\mathrm{d}m, \quad D_{xy} = \int xy \,\mathrm{d}m \tag{2}$$

poszukujemy momentów bezwładności i dewiacji względem w nowym układzie współrzędnych ζ, η:

$$I_\zeta = \int \eta^2 \,\mathrm{d}m, \quad I_\eta = \int \zeta^2 \,\mathrm{d}m, \quad D_{\zeta\eta} = \int \eta\zeta \,\mathrm{d}m \tag{3}$$

Moment bezwładności dla osi ζ

Podstawiamy zależności z poprzedniego rysunku otrzymujemy:

$$I_\zeta = \int \eta^2 \, \mathrm{d}m = \int (y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 \, \mathrm{d}m \tag{4}$$

$$\int (y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \cos\alpha \sin\alpha + x^2 \sin^2 \alpha) \, \mathrm{d}m = \tag{5}$$

$$\cos^2 \alpha \int y^2 \, \mathrm{d}m - 2 \cos\alpha \sin\alpha \int xy \, \mathrm{d}m + \sin^2 \alpha \int x^2 \, \mathrm{d}m \tag{6}$$

Z uproszczenia i podstawienia zależności na momenty w układzie współrzędnych x, y otrzymujemy :

$$I_\zeta = I_x \cos^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha \tag{7}$$

Moment bezwładności dla osi η

W identyczny sposób obliczamy moment bezwładności dla drugiej osi:

$$I_\eta = \int \zeta^2 \,\mathrm{d}m = \int (y\ sin\alpha + x\ cos\alpha)^2 \,\mathrm{d}m = \tag{8}$$

$$\int (y^2 \sin^2\alpha + 2xy \cos\alpha \sin\alpha + x^2 \cos^2\alpha) \,\mathrm{d}m = \tag{9}$$

$$\sin^2\alpha \int y^2 \,\mathrm{d}m + 2\cos\alpha \sin\alpha \int xy \,\mathrm{d}m + \cos^2\alpha \int x^2 \,\mathrm{d}m \tag{10}$$

Z uproszczenia i podstawienia zależności na momenty w układzie współrzędnych x, y otrzymujemy :

$$I_\eta = I_x \sin^2\alpha + D_{xy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2\alpha \tag{11}$$

Moment dewiacji dla osi η i ζ

W identyczny sposób obliczamy moment dewiacji:

$$D_{\zeta\eta} = \int \zeta\eta \, \mathrm{d}m = \int (y\ sin\alpha + x\ cos\alpha)(y\ cos\alpha - x\ sin\alpha)\, \mathrm{d}m = \tag{12}$$

$$\int (xy \cos^2\alpha - x^2 \cos\alpha \sin\alpha + y^2 \sin\alpha \cos\alpha - xy \sin^2\alpha)\, \mathrm{d}m = \tag{13}$$

$$D_{xy} \cos^2\alpha - D_{xy} \sin^2\alpha - I_y \sin\alpha \cos\alpha + I_x \sin\alpha \cos\alpha \tag{14}$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$D_{\zeta\eta} = D_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha \tag{15}$$

Komplet wzorów

Przejście z układu osi x, y do obróconego o kąt α układu osi ζ, η, ogólnie mówiąc pomiędzy dwom układami:

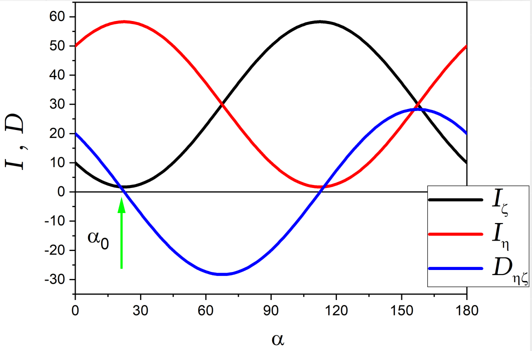
$$I_\eta = I_x \sin^2\alpha + D_{xy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2\alpha \tag{16}$$

$$I_\zeta = I_x \cos^2\alpha - D_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2\alpha \tag{17}$$

$$D_{\zeta\eta} = D_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha \tag{18}$$

Wizualizacja zmian momentów w funkcji α

Przykładowe przebiegi zmiany momentów bezwładności i dewiacji:



Punkt ekstremum momentów I

Dla pewnej wartości kąta obrotu α_o uzyskujemy wartości ekstremalne, momentów bezwładności I_ζ i I_η a moment dewiacji $D_{\zeta\eta}$ się zeruje.

Główne momenty bezwładności

Osie główne

Są to takie osie układu dla których moment dewiacji się zeruje a wartości momentów bezwładności osiągają skrajne ekstremalne wartości.

Momenty główne

Są to momenty bezwładności wyznaczane dla osi głównych układu. Zazwyczaj oznaczane są za pomocą I_{max} i I_{min} lub I_1, I_2.

$$D_{\zeta\eta} = 0, \quad I_\zeta = I_1 = I_{max}, \quad I_\eta = I_2 = I_{min} \tag{19}$$

Centralne momenty i osie

Centralne osie

Są to osie układu przechodzące przez środek ciężkości.
Mogą być one centralne i główne zarazem ale nie koniecznie.

Centralne momenty bezwładności

Są to momenty liczone względem centralnych osi układu. Mogą być one główne ale nie koniecznie.

Wzór na kąt α_0 ($D_{\zeta\eta} = 0$)

Wartość kąta o jaką trzeba obrócić układ by dostać główne momenty bezwładności wyznaczamy z warunku:

$$D_{\zeta\eta} = 0 \tag{20}$$

Podstawiając do wzorów uzyskanych poprzednio (18) otrzymujemy:

$$0 = D_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 \tag{21}$$

Ostatecznie wyliczamy poszukiwany kąt α_0 :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2D_{xy}}{(I_x - I_y)} \tag{22}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2D_{xy}}{I_x - I_y}\right) \tag{23}$$

gdzie D_{xy}, I_x, I_y są momentami w wyjściowym (nieobróconym układzie współrzędnych).

Główne momenty bezwładności

Po wyznaczeniu kąta α_o można obliczyć wartości głównych momentów bezwładności wstawiając go do wyznaczonych poprzednio równań (16 i 17):

$$I_\zeta(\alpha = \alpha_o) = I_{max} = I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2D_{xy})^2} \tag{24}$$

$$I_\eta(\alpha = \alpha_o) = I_{min} = I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2D_{xy})^2} \tag{25}$$

Transformację z osi dowolnych do osi głównych nazywamy transformacją prostą.

Transformacja odwrotna

Zagadnienie odwrotne polega na wyznaczeniu wartości momentów bezwładności w dowolnie wybranym układzie współrzędnych obróconym o zadany kąt w stosunku do osi głównych. Działania przeprowadzamy wychodząc z osi głównych (dla których moment dewiacji jest 0) i obracamy się do nowego układu.
Zamieniamy oznaczenia osi i podstawiamy:

$$I_x = I_1, \quad I_y = I_2, \quad D_{12} = D_{xy} = 0 \tag{26}$$

Po podstawieniu powyższych do równań (16, 17, 18) otrzymujemy:

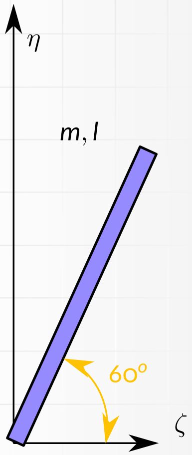
$$I_\zeta = I_1 \cos^2\alpha + I_2 \sin^2\alpha + 0 \sin 2\alpha \tag{27}$$

$$I_\eta = I_1 \sin^2\alpha + I_2 \cos^2\alpha - 0 \sin 2\alpha \tag{28}$$

$$D_{\zeta\eta} = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\alpha \tag{29}$$

Transformację z osi głównych do osi dowolnych nazywamy transformacją odwrotną.

Przykład obliczeniowy



Zadanie 1.
Obliczyć momenty bezwładności i dewiacji dla pręta obróconego o kąt 60^o w stosunku do osi wzdłużnej. Dane pręta to m, l.
Szukane: $I_\zeta, I_\eta, D_{\zeta\eta}$

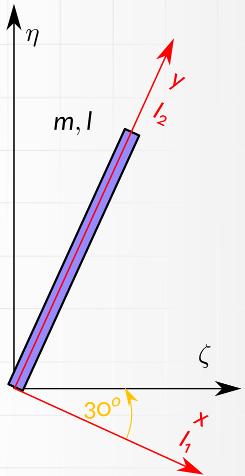
Przykład obliczeniowy - transformacja odwrotna

Co wiemy?
Z tablic lub poprzednich obliczeń znamy momenty bezwładności i dewiacji w układzie x, y, jak na rysunku :
$I_x = \frac{ml^2}{3}, I_y = 0, D_{xy} = 0$

Uwaga

Moment dewiacji w tym układzie jest równy zero to oznacza, że są to jego osie główne! Stąd możemy pisać: $I_{max} = I_x$, $I_{min} = I_y$.

Przykład obliczeniowy - transformacja odwrotna



Korzystamy z wyprowadzonych wzorów na transformację odwrotną (z głównych do dowolnych osi bezwładności):

$$I_\zeta = I_1\cos^2\alpha + I_2\sin^2\alpha = \frac{ml^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 = \frac{ml^2}{4}$$

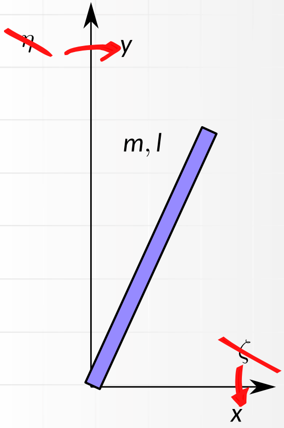
$$I_\eta = I_1\sin^2\alpha + I_2\cos^2\alpha = \frac{ml^2}{3}\frac{1}{4} + 0 = \frac{ml^2}{12}$$

$$D_{\zeta\eta} = \frac{I_1 - I_2}{2}\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ml^2}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}ml^2$$

$$I_\zeta = \frac{ml^2}{4}\ ,\ I_\eta = \frac{ml^2}{12},\ D_{\zeta\eta} = \frac{\sqrt{3}}{12}ml^2$$

Przykład obliczeniowy - transformacja prosta

W celu sprawdzenia obliczeń rozwiązujemy zagadanie jeszcze raz - tym razem cofając się. Tym razem znamy osie dowolne a potrzebujemy odszukać osie główne. Zamieniamy oznaczenia ζ na x i η na y tak by były zgodne z wzorami wyprowadzanymi na początku.



Podstawiając do wzorów:

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2D_{xy})^2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{4} + \frac{ml^2}{12}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ml^2}{4} - \frac{ml^2}{12}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{12}ml^2\right)^2} =$$

$$\frac{ml^2}{6} + \frac{ml^2}{6} = \frac{ml^2}{3}$$

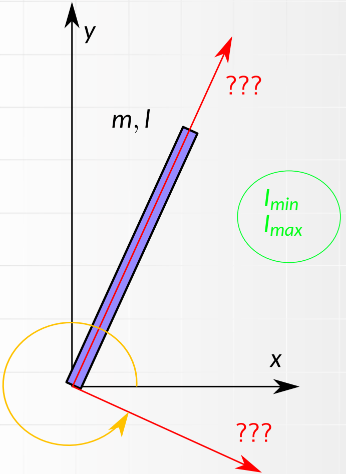
$$I_{min} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2D_{xy})^2} =$$

$$I_{min} = \frac{ml^2}{6} - \frac{ml^2}{6} = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\frac{-2D_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{1}{2}\arctan(-\sqrt{3}) = -30^o$$

Przykład obliczeniowy - transformacja prosta

Wyniki ze sprawdzenia pokrywają się z tym co było na początku. Potwierdziliśmy tym samym miejsce położenia osi głównych.

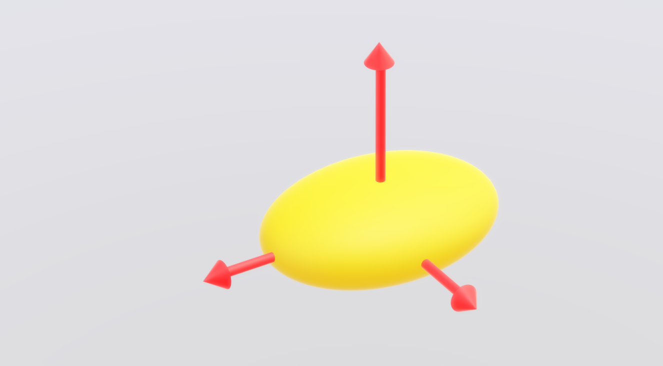


Problemem jest tylko wyznaczenie która to oś maksymalnego momentu a która minimalnego. Można to "wyczuć" lub zrobić przez analizę znaku momentu dewiacji.

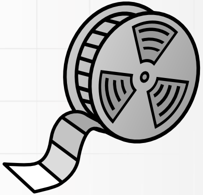
Dla $D_{xy} > 0$ oś maksymalna tworzy z osią x kąt otwarty.
Dla $D_{xy} < 0$ oś maksymalna tworzy z osią x kąt ostry.

Bryły 3D - Elipsoida bezwładności

Elipsoida bezwładności – konstrukcja umożliwiająca wyznaczanie momentów bezwładności względem dowolnej osi przechodzącej przez środek masy bryły.



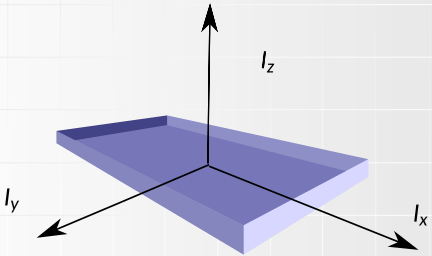
Jak zobaczyć osie główne?



https://www.youtube.com/watch?v=fPI-rSwAQNg

Uwaga : działa także w warunkach ziemskich … rzucanie telefonem nie jest najlepszym pomysłem :D

Płyta - momenty bezwładności



Płyta o wymiarach a i $2a$.
Momenty bezwładności:

$$I_x = \frac{ma^2}{12}$$

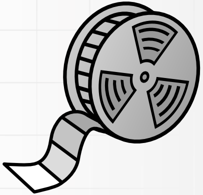
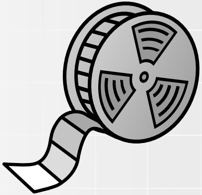
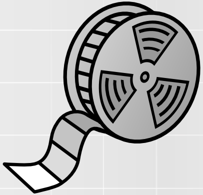
$$I_y = \frac{m(2a)^2}{12} = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_z = \frac{ma^2}{3} + \frac{ma^2}{12}$$

$$I_z > I_y > I_x$$

$$I_z = I_{max}, \quad I_x = I_{min}$$

Jak zobaczyć osie główne?

- https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM
- https://www.youtube.com/watch?v=L209eBl_Gzw
- https://www.youtube.com/watch?v=fCaZlVDgail