# MECHANIKA II. Reakcje dynamiczne w łożyskach

Daniel Lewandowski

Politechnika Wrocławska, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

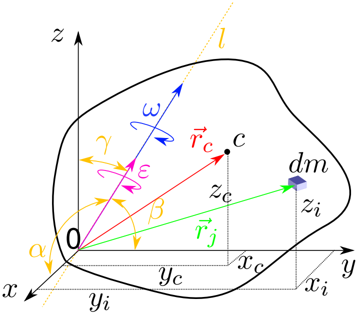
http://kmim.wm.pwr.edu.pl/lewandowski/

daniel.lewandowski@pwr.edu.pl

# Zasada pędu w ruchu obrotowym

Zakładamy nieruchomy punkt obrotu $0$ i oś obrotu $l$ dla bryły sztywnej. Dla dowolnego kierunku osi obrotu, określonym przez kąty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ składowe prędkości wynoszą:

$$\omega_x = \omega\cos\alpha, \quad \omega_y = \omega\cos\beta, \quad \omega_z = \omega\cos\gamma$$

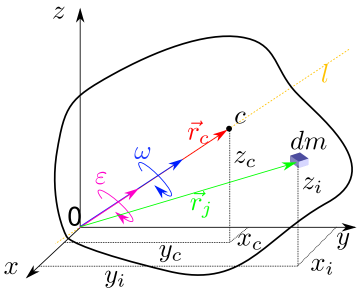



Pęd ogólny i jego pochodna:

$$\vec{H} = m\cdot\vec{v}_c = m(\vec{\omega}\times\vec{r}_c)$$
$$\dot{\vec{H}} = m\cdot\vec{a}_c = m(\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_c + \vec{\omega}\times\vec{v}_c) \tag{1}$$
$$\dot{\vec{H}} = m(\vec{a}_\tau + \vec{a}_\eta) = \vec{P}$$

gdzie $\vec{P}$ jest sumą geometryczną wszystkich sił zewnętrznych działających na to ciało.

W szczególnym przypadku gdy oś obrotu przechodzi przez środek masy i $\vec{r}_c$ pokrywa się z $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$:




$$\vec{v}_c = 0, \quad \vec{a}_c = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{H} = 0, \quad \dot{\vec{H}} = 0$$

Rozpisując w ogólnym przypadku:

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y \cdot z_c - \omega_z \cdot y_c) + \vec{j}(\omega_z \cdot x_c - \omega_x \cdot z_c) + \vec{k}(\omega_x \cdot y_c - \omega_y \cdot x_c) \tag{2}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \vec{i}(\varepsilon_y \cdot z_c - \varepsilon_z \cdot y_c) + \vec{j}(\varepsilon_z \cdot x_c - \varepsilon_x \cdot z_c) + \vec{k}(\varepsilon_x \cdot y_c - \varepsilon_y \cdot x_c) \tag{3}$$

# Zasada pędu w ruchu obrotowym

$$\vec{a}_\eta = \vec{\omega} \times \vec{v}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y) + \vec{j}(\omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z) + \vec{k}(\omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x \tag{4}$$

$$\vec{v}_c = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z \tag{5}$$

$$\vec{a}_\eta = \vec{i} \cdot a_{\eta x} + \vec{j} \cdot a_{\eta y} + \vec{k} \cdot a_{\eta z} \tag{6}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{i} \cdot a_{\tau x} + \vec{j} \cdot a_{\tau y} + \vec{k} \cdot a_{\tau z} \tag{7}$$

# Zasada pędu w ruchu obrotowym

Sprowadzamy rozwiązanie do obrotu wyłącznie wokół jednej osi - $z$

$$\omega_x = \omega_y = 0, \;\; \omega_z = \omega, \;\; \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \;\; \varepsilon_z = \varepsilon \tag{8}$$

$$\vec{v}_c = \vec{i}(0 \cdot z_c - \omega \cdot y_c) + \vec{j}(\omega \cdot x_c - 0 \cdot z_c) + \vec{k}(0 \cdot y_c - 0 \cdot x_c) \tag{9}$$

$$\vec{v}_c = \vec{i}(-\omega \cdot y_c) + \vec{j}(\omega \cdot x_c) \tag{10}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{i}(0 \cdot z_c - \varepsilon \cdot y_c) + \vec{j}(\varepsilon \cdot x_c - 0 \cdot z_c) + \vec{k}(0 \cdot y_c - 0 \cdot x_c) \tag{11}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{i}(-\varepsilon \cdot y_c) + \vec{j}(\varepsilon \cdot x_c) \tag{12}$$

$$\vec{a}_\eta = \vec{i}(0 \cdot v_{c_z} - \omega \cdot v_{c_y}) + \vec{j}(\omega \cdot v_{c_x} - 0 \cdot v_{c_z}) + \vec{k}(0 \cdot v_{c_y} - 0 \cdot v_{c_x}) \tag{13}$$

$$\vec{a}_\eta = \vec{i}(-\omega \cdot v_{c_y}) + \vec{j}(\omega \cdot v_{c_x}) \tag{14}$$

# Zasada pędu w ruchu obrotowym

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}_c = \vec{i}(m \cdot v_{c_x}) + \vec{j}(m \cdot v_{c_y}) + \vec{k}(m \cdot v_{c_z}) = \vec{H}_x + \vec{H}_y + \vec{H}_z \quad (16)$$

$$\vec{H} = \begin{cases} H_x = m \cdot v_{c_x} = m \cdot (-\omega \cdot y_c) \\ H_y = m \cdot v_{c_y} = m \cdot (\omega \cdot x_c) \\ H_z = m \cdot v_{c_z} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\dot{\vec{H}} = m \cdot \vec{a}_c = \vec{i}(m \cdot a_{c_x}) + \vec{j}(m \cdot a_{c_y}) + \vec{k}(m \cdot a_{c_z}) = \dot{\vec{H}}_x + \dot{\vec{H}}_y + \dot{\vec{H}}_z \quad (18)$$

$$\dot{\vec{H}} = \begin{cases} \dot{H}_x = m \cdot (a_{\eta_x} + a_{\tau_x}) = m \cdot (-\omega^2 \cdot x_c - \varepsilon \cdot y_c) = P_x \\ \dot{H}_y = m \cdot (a_{\eta_y} + a_{\tau_y}) = m \cdot (-\omega^2 \cdot y_c + \varepsilon \cdot x_c) = P_y \\ \dot{H}_z = m \cdot (a_{\eta_z} + a_{\tau_z}) = m \cdot 0 = P_z \end{cases} \quad (19)$$

# Zasada krętu w ruchu obrotowym

$$\vec{K}_0 = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm \tag{20}$$

$$d\vec{K}_0 = \vec{r} \times (dm \cdot \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ dm \cdot v_x & dm \cdot v_y & dm \cdot v_z \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$d\vec{K}_0 = \vec{i}(y \cdot v_z - z \cdot v_y)dm + \vec{j}(z \cdot v_x - x \cdot v_z)dm + \vec{k}(x \cdot v_y - y \cdot v_x)dm \tag{22}$$

$$K_0 = \begin{cases} K_x = \int dK_x = \int (y \cdot v_z - z \cdot v_y)dm \\ K_y = \int dK_y = \int (z \cdot v_x - x \cdot v_z)dm \\ K_z = \int dK_z = \int (x \cdot v_x - y \cdot v_x)dm \end{cases} \tag{23}$$

# Zasada krętu w ruchu obrotowym

Korzystając z wzorów:

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_c = \vec{i}(\omega_y \cdot z_c - \omega_z \cdot y_c) + \vec{j}(\omega_z \cdot x_c - \omega_x \cdot z_c) + \vec{k}(\omega_x \cdot y_c - \omega_y \cdot x_c) \tag{24}$$

$$\vec{v}_c = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z \tag{25}$$

Dla dowolnego punktu:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{cases} \tag{26}$$

Podstawiamy powyższe równanie do wzorów na kręt:

$$K_x = \int (y \cdot v_z - z \cdot v_y) dm = \int \left( y(\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x) - z(\omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z) \right) dm \tag{27}$$

# Zasada krętu w ruchu obrotowym

$$K_x = \int (y \cdot v_z - z \cdot v_y) dm = \int \left(y(\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x) - z(\omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z)\right) dm \tag{28}$$

$$K_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int (x \cdot y)\, dm - \omega_z \int (x \cdot z)\, dm \tag{29}$$

$$K_x = \omega_x \cdot I_x - \omega_y \cdot I_{xy} - \omega_z \cdot I_{xz} \tag{30}$$

Podobnie wyprowadzamy dla pozostałych osi:

$$K_y = \omega_y \cdot I_y - \omega_z \cdot I_{yz} - \omega_x \cdot I_{yx} \tag{31}$$

$$K_z = \omega_z \cdot I_z - \omega_x \cdot I_{zx} - \omega_y \cdot I_{zy} \tag{32}$$

# Zasada krętu w ruchu obrotowym

Upraszczając do ruchu w osi $z$ ($\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega$) otrzymujemy :

$$\vec{K} = \begin{cases} K_x = -I_{xz} \cdot \omega \\ K_y = -I_{yz} \cdot \omega \\ K_z = I_z \cdot \omega \end{cases} \tag{33}$$

## Pochodna krętu

W kolejnym etapie należy wyliczyć pochodną krętu - $\dot{\vec{K}}_0$. Rachunki pośrednie ze względu na zawiły charakter zostaną tu pominięte jako nieistotne dla końcowego rozwiązania.

$$\dot{\vec{K}}_0 = \begin{cases} \dot{K}_x = (I_x\varepsilon_x - I_{xy}\varepsilon_y - I_{xz}\varepsilon_z) + (\omega_y K_z - \omega_z K_y) \\ \dot{K}_y = (I_y\varepsilon_y - I_{yz}\varepsilon_z - I_{yx}\varepsilon_x) + (\omega_z K_x - \omega_x K_z) \\ \dot{K}_z = (I_z\varepsilon_z - I_{zx}\varepsilon_x - I_{zy}\varepsilon_y) + (\omega_x K_y - \omega_y K_x) \end{cases} \tag{34}$$

# Zasada krętu w ruchu obrotowym

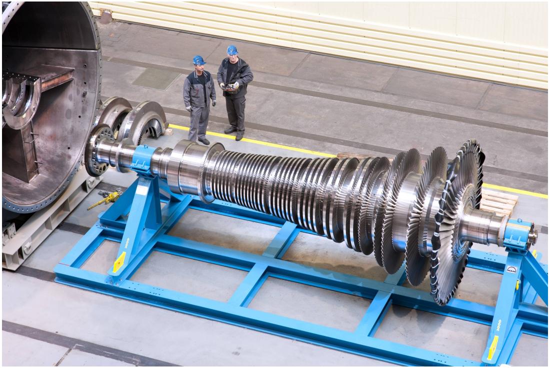
Przyjmując jak poprzednio oś obrotu $z$, wzory upraszczają się:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \begin{cases} \dot{K}_x = -I_{xy}\varepsilon + I_{yz}\omega^2 = M_x \\ \dot{K}_y = -I_{yz}\varepsilon - I_{xz}\omega^2 = M_y \\ \dot{K}_z = I_z\varepsilon = M_z \end{cases} \tag{35}$$

gdzie $M_x$, $M_y$, $M_z$ są składowymi momentu $M_0$ od sił zewnętrznych.

# Wirujące części maszyn

Bardzo istotnym zagadnieniem w dynamice ruchu obrotowego są reakcje w łożyskach wirujących części maszyn. Siły czynne wywołują reakcje statyczne. Natomiast siły bezwładności wywołane ruchem obiektu wywołu reakcje dynamiczne.

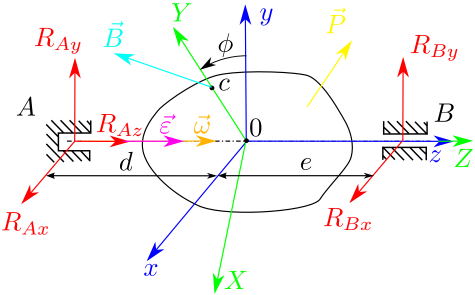


# Reakcje dynamiczne

Siły reakcji sumują się od składowych statycznych i dynamicznych:

$$\vec{R}_{A,B} = \vec{R}'_{A,B} + \vec{R}''_{A,B} \tag{36}$$

Reakcje dynamiczne poruszają się wraz obracającym się układem współrzędnych $0XYZ$.




Równania wektorowe pędu i krętu:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{P} + \vec{R}''_A + \vec{R}''_B = -\vec{B} \tag{37}$$

$$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}_0(P) + \vec{M}_0(R) = -\vec{M}_0(B) \tag{38}$$

gdzie $M_0$ są momentami sił względem punktu $0$.

Rozpisując równania na zmianę pędu i krętu otrzymamy:

$$\begin{cases} R^{''}_{AX} + R^{''}_{BX} = m(-\omega^2\, x_c - \varepsilon\, y_c) \\ R^{''}_{AY} + R^{''}_{BY} = m(-\omega^2\, y_c + \varepsilon\, x_c) \\ R^{''}_{AY}\, d - R^{''}_{BY}\, e = I_{yz}\omega^2 - I_{xz}\varepsilon \\ -R^{''}_{AX}\, d + R^{''}_{BX}\, e = -I_{xz}\omega^2 - I_{yz}\varepsilon \end{cases} \tag{39}$$

**Reakcje dynamiczne**

możemy obliczyć stosując układ powyższych równań, do których należy podać dane związane z rozkładem masy - środki ciężkości $x_c$, $y_c$, momenty dewiacji $I_{yz}$, $I_{xz}$.

# Wyważanie wirujących części

## Wyważanie

Niwelacja reakcji dynamicznych polega na takim manipulowaniu rozkładem masy by oś obrotu przechodziła przez środek ciężkości oraz była główną osią bezwładności.

$$
\begin{cases}
0 = m(-\omega^2 \, x_c - \varepsilon \, y_c) \\
0 = m(-\omega^2 \, y_c + \varepsilon \, x_c) \\
0 = I_{yz}\omega^2 - I_{xz}\varepsilon \\
0 = -I_{xz}\omega^2 - I_{yz}\varepsilon
\end{cases}
\tag{40}
$$

# Przykłady

.........