

MECHANIKA II. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

Daniel Lewandowski

Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

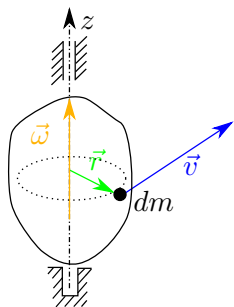
<http://kmim.wm.pwr.edu.pl/lewandowski/>
daniel.lewandowski@pwr.edu.pl

- 1 Kręt dla bryły sztywnej
- 2 Ruch postępowy bryły sztywnej
- 3 Ruch obrotowy bryły sztywnej

Szczególny przypadek krętu

Obrót wokół osi

Rozpatrzmy przypadek obrotu układu punktów materialnych wokół ustalonej osi. Punkty są rozłożona jest po pewnej objętości - do analizy wybieramy jeden punkt elementarny o masie dm .



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ lub } v = \omega \cdot r \quad (1)$$

Elementarny kręt wynosi:

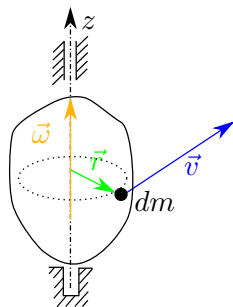
$$dK = v \cdot r \, dm = \omega \cdot r \cdot r \, dm \quad (2)$$

Dla układu punktów:

$$K_z = \int_M dK = \int_M \omega \cdot r^2 \, dm \quad (3)$$

Szczególny przypadek krętu

Obrót wokół osi



$$K_z = \int_M \omega \cdot r^2 dm \quad (4)$$

Ponieważ prędkość obrotowa jest taka sama dla każdego z punktów bryły - można ją wyciągnąć przed całkę i otrzymać:

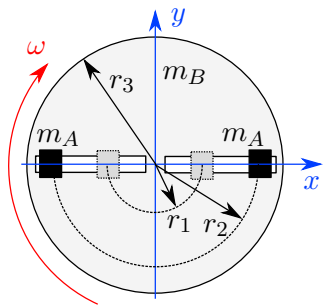
$$K_z = \omega \int_M r^2 dm = \omega I \quad (5)$$

gdzie I jest momentem bezwładności dla układu punktów materialnych względem osi z .

Przykład 1

Kręt bryły sztywnej

Płyta kołowa o masie m_B wraz dwoma ciężarkami o masie m_A obraca się wokół osi z z prędkością obrotową ω . Jak zmieni się prędkość wirowania jeśli położenie ciężarków zmieni się z promienia r_1 na r_2 ? Ruch ciężarków odbywać się będzie na skutek działania sił wewnętrznych.



Dane:

$\omega_1 = 10 \frac{1}{s}$, $m_B = 2$ (kg), $m_A = 0.2$ (kg), $r_1 = 0.1$ (m), $r_2 = 0.3$ (m), $r_3 = 0.45$ (m).

Szukane:

$\omega_2 = ?$

Przykład 1

Rozwiązanie cz. 1

Rozwiązując korzystamy z zasady zachowania krętu dla układu punktów materialnych. Ponieważ zmiana rozłożenia masy odbywa się bez udziału sił zewnętrznych to kręt układu pozostanie stały.

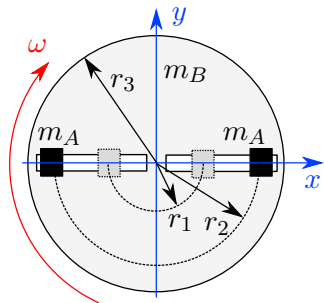
$$K_1 = K_B + 2 \cdot K_A \rightarrow \begin{cases} K_B = \frac{m_B \cdot r_3^2}{4} \cdot \omega_1 \\ K_A = m_A \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 \end{cases} \quad (6)$$

Dla drugiego położenia:

$$K_2 = K_B + 2 \cdot K_A \rightarrow \begin{cases} K_B = \frac{m_B \cdot r_3^2}{4} \cdot \omega_2 \\ K_A = m_A \cdot r_2^2 \cdot \omega_2 \end{cases} \quad (7)$$

Porównując kręty możemy zapisać:

$$K_1 = K_2 = \text{const.} \quad (8)$$



Przykład 1

Rozwiązanie cz. 2

$$\frac{m_B \cdot r_3^2}{4} \cdot \omega_1 + 2 \cdot m_A \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 = \frac{m_B \cdot r_3^2}{4} \cdot \omega_2 + 2 \cdot m_A \cdot r_2^2 \cdot \omega_2 \quad (9)$$

$$\omega_1 \left(\frac{m_B \cdot r_3^2}{4} + 2 \cdot m_A \cdot r_1^2 \right) = \omega_2 \left(\frac{m_B \cdot r_3^2}{4} + 2 \cdot m_A \cdot r_2^2 \right) \quad (10)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{\left(\frac{m_B \cdot r_3^2}{4} + 2 \cdot m_A \cdot r_1^2 \right)}{\left(\frac{m_B \cdot r_3^2}{4} + 2 \cdot m_A \cdot r_2^2 \right)} = \omega_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} \quad (11)$$

Podstawiając dane numeryczne:

$$\omega_2 = 10 \cdot \frac{0.101 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.1^2}{0.101 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.3^2} = 7.66 \left(\frac{1}{s} \right) \quad (12)$$

Wniosek z poprzedniego zadania

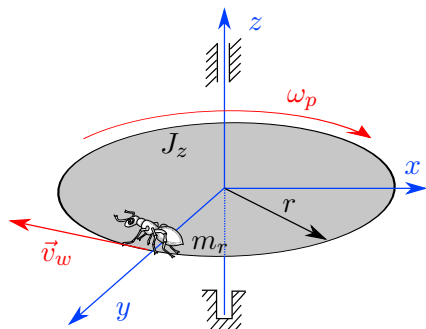
Zmiana prędkości obrotowej zależy od zmiany momentu bezwładności układu punktów materialnych a więc od rozłożenia masy.

▶ Eksperyment na orbicie -> NASA

Przykład 2

Kręt bryły sztywnej

Płyta kołowa o masie m_p może obracać się bez tarcia wokół osi z . Na jej obwodzie znajduje się punkt materialny o masie m_r . W chwili czasu $t=0$ oba objekty pozostają w spoczynku. Dla czasu $t>0$ rozpoczyna się ruch punktu m_r po obwodzie płyty z prędkością względną \vec{v}_w . Obliczyć z jaką prędkością będzie obracać się płyta. Moment bezwładności płyty I_z .



Dane:

$$v_w = 0.2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right), m_r = 0.01 \text{ (kg)}, \\ I_z = 2 \text{ (kgm}^2\text{)}, r = 0.5 \text{ (m)}$$

Szukane:

$$\omega_p = ?$$

Przykład 2

Rozwiązanie cz 1.

Jak wyglądają poszczególne kręty?

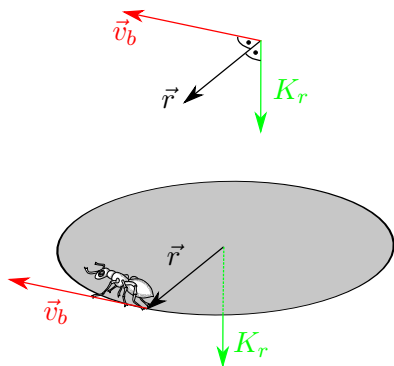
Kręt punktu materialnego:

$$\vec{K}_r = \vec{r} \times m\vec{v}_b \quad (13)$$

Uwaga: \vec{v}_b - oznacza prędkość bezwzględną.

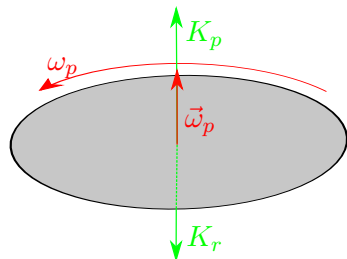
UWAGA

Nasz robaczek porusza się prędkością względną \vec{v}_w po obwodzie płyty.



Przykład 2

Rozwiązanie cz. 2



Kręt płyty:

$$\vec{K}_p = I_z \vec{\omega}_p \quad (14)$$

Moment bezwładności jest dodatnim skalarom więc zwrot krętu płyty jest zgodny ze zwrotem prędkości wirowania. Kierunek obrotu płyty pojawia się jako przeciwny do kierunku ruchu punktu m_r .

Suma krętów płyty i robaczka:

$$\vec{K}_p + \vec{K}_r = 0 \implies \vec{K}_p = -\vec{K}_r \quad (15)$$

Przykład 2

Rozwiązanie cz. 3

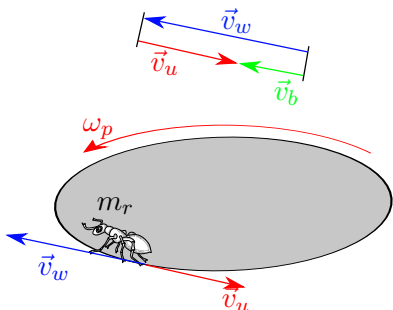
Liczmy kręt całkowity:

$$K_p = I_z \cdot \omega_p, \quad K_r = m_r \cdot r \cdot v_b \quad (16)$$

Prędkość bezwzględną v_b obliczamy z różnicy ruchu płyty i punktu:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_w + \vec{v}_u \rightarrow v_b = v_w - v_u \rightarrow v_b = v_w - \omega_p \cdot r \quad (17)$$

Kręt układu:



$$K = K_p - K_r = 0$$
$$I_z \cdot \omega_p - m_r \cdot r \cdot (v_w - v_u) = 0$$

$$\omega_p = \frac{m_r \cdot r \cdot v_w}{m_r \cdot r^2 + I_z}$$

$$\omega_p = \frac{0.01 \cdot 0.5 \cdot 0.2}{0.01 \cdot 0.5^2 + 2} = 0.00049 \frac{1}{s} \quad (18)$$

Równanie dynamiki

Równanie dynamiki ruchu postępowego ciała sztywnego ma taką samą postać jak równanie dynamiczne punktu materialnego o masie równej masie całego ciała i poddanego działaniu sił zewnętrznych działających na rozpatrywane ciało.

Uwaga: Siły te muszą spełniać warunek $\sum \vec{M}_{ic} = 0$

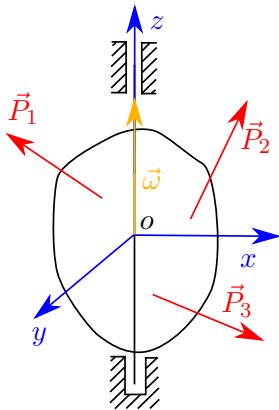
Ruch obrotowy bryły sztywnej

Równanie dynamiki ruchu obrotowego wyprowadzimy z równania krętu:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{(i=1)}^n M_{iz} = M_z, \quad K_z = I_z \omega \quad (19)$$

Podstawiając wyrażenie na kręt do pochodnej otrzymamy:

$$\frac{d(I_z \cdot \omega)}{dt} = M_z \rightarrow I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \quad (20)$$



Równanie dynamiki ruchu obrotowego ciała sztywnego:

$$I_z \varepsilon = M_z \quad (21)$$

$$I_z \ddot{\phi} = M_z \quad (22)$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej

W szczególnym przypadku brak jest momentów od sił zewnętrznych lub ich suma równa się zero $M_z = 0$.

Wówczas otrzymujemy równanie:

$$I_z \varepsilon = I_z \frac{d\omega}{dt} = 0 \implies \varepsilon = 0 \implies \omega = \text{const.} \quad (23)$$

co oznacza iż takie ciało porusza się ruchem obrotowym jednostajnym.

W ogólnym przypadku gdy $M_z \neq 0$ otrzymujemy równanie różniczkowe, które można rozwiązać otrzymując funkcję $\phi(t)$.

W przypadku gdy $M_z = \text{const.}$ ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym lub opóźnionym.

Równanie ruchu obrotowego bryły sztywnej

Rozwiązując równanie dla $M_z = \text{const.}$ otrzymamy:

$$I_z \ddot{\phi} = M_z \implies \ddot{\phi} = \frac{M_z}{I_z} \implies \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{M_z}{I_z} \quad (24)$$

$$\int d\dot{\phi} = \int \frac{M_z}{I_z} dt \implies \dot{\phi} = \frac{M_z}{I_z} t + C_1 \quad (25)$$

Warunki początkowe: $\dot{\phi}(t=0) = \omega_0$, $\phi(t=0) = \phi_0$

$$C_1 = \omega_0 \implies \dot{\phi} = \frac{M_z}{I_z} t + \omega_0 \implies \frac{d\phi}{dt} = \frac{M_z}{I_z} t + \omega_0 \quad (26)$$

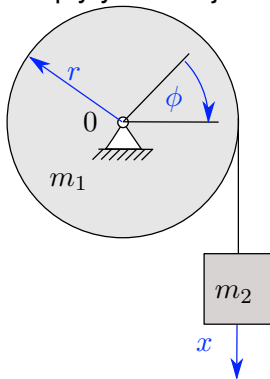
$$\int d\phi = \int \left(\frac{M_z}{I_z} t + \omega_0 \right) dt \implies \phi = \frac{M_z \cdot t^2}{I_z \cdot 2} + \omega_0 \cdot t + C_2 \quad (27)$$

$$\phi(t) = \frac{M_z \cdot t^2}{I_z \cdot 2} + \omega_0 \cdot t + \phi_0 \quad (28)$$

Przykład 3

Ruch obrotowy i postępowy bryły sztywnej

Układ dwóch ciał znajduje się w spoczynku w chwili $t=0$. Płyta kołowa o masie m_1 oraz prostokąt o masie m_2 połączone są liną. Na ciała działają siły grawitacji, brak jest tarcia. Obliczyć równanie ruchu dla płyty kołowej oraz siłę w linie .



Dane:

$$m_1 = 100 \text{ (kg)}, m_2 = 10 \text{ (kg)}, r = 1 \text{ (m)},$$

Szukane:

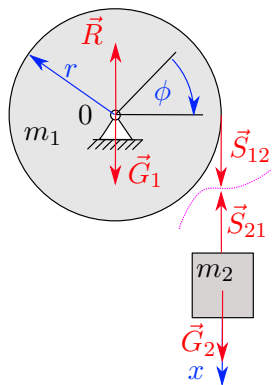
$$\phi(t), S_{1-2}$$

Przykład 3

Rozwiązanie cz.1

Układ rozdzielamy na dwie części ponieważ każda z nich porusza się innego rodzaju ruchem. Oznaczamy wszystkie siły na rysunku.

Dla ruchu obrotowego ciała m_1 możemy napisać równanie:



$$I_z \cdot \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{zi} \implies I_z \cdot \varepsilon = S_{12} \cdot r \quad (29)$$

Dla ciała m_2 równanie uchu postępowego:

$$m_2 \cdot \ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_i \implies m_2 \cdot \ddot{x} = G_2 - S_{21} \quad (30)$$

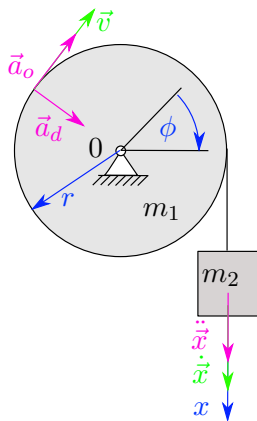
Otrzymujemy w ten sposób układ równań.

Przykład 3

Rozwiązanie cz.2

Wykorzystując związki ruchu punktów na obwodzie koła, liny i masy m_2 :

$$v = \frac{d\phi}{dt} \cdot r = \omega \cdot r = \dot{x}, \quad a_o = \frac{d\omega}{dt} \cdot r = \varepsilon \cdot r = \ddot{x}, \quad S_{12} = S_{21} \quad (31)$$



Wstawiając do układu równań :

$$\begin{cases} I_z \cdot \varepsilon = S_{12} \cdot r \\ m_2 \cdot \varepsilon \cdot r = m_2 \cdot g - S_{12} \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} S_{12} = \frac{I_z \cdot \varepsilon}{r} \\ m_2 \cdot \varepsilon \cdot r = m_2 \cdot g - \frac{I_z \cdot \varepsilon}{r} \end{cases} \quad (33)$$

$$\varepsilon \left(m_2 \cdot r + \frac{I_z}{r} \right) = m_2 \cdot g \quad (34)$$

Przykład 3

Rozwiązanie cz.3

Ostatecznie otrzymujemy równanie na przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{m_2 \cdot g \cdot r}{m_2 \cdot r^2 + I_z} = \frac{m_2 \cdot g \cdot r}{m_2 \cdot r^2 + \frac{m_1 \cdot r^2}{2}} = \frac{10 \cdot 9.81 \cdot 1^2}{10 \cdot 1^2 + \frac{100 \cdot 1^2}{2}} = 1.63 \left(\frac{1}{s^2} \right) \quad (35)$$

Siła w linie wynosi:

$$S_{12} = \frac{I_z \cdot \varepsilon}{r} = \frac{50 \cdot 1.635}{1} = 81.75 \text{ (N)} \quad (36)$$

Aby uzyskać równanie ruchu masy m_1 należy rozwiązać równanie:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 1.635 \implies \int d\omega = \int 1.635 dt \implies \omega = 1.635 \cdot t + C_1 \quad (37)$$

$$\omega(t=0) = 0 \implies 0 = 1.635 \cdot C_1 \implies C_1 = 0 \implies \omega = 1.635 \cdot t \quad (38)$$

Przykład 3

Rozwiązanie cz.4

Rozwiązując dalej:

$$\frac{d\phi}{dt} = 1.653 \cdot t \implies \int d\phi = \int 1.653 \cdot t dt \implies \phi = 1.635 \frac{t^2}{2} + C_2 \quad (39)$$

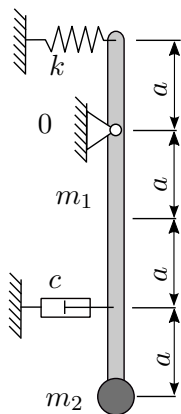
$$\phi(t=0) = 0 \implies 0 = 1.635 \frac{t^2}{2} + C_2 \implies C_2 = 0 \quad (40)$$

Rozwiązanie końcowe:

$$\phi(t) = 1.635 \frac{t^2}{2} \quad (41)$$

Przykład 4

Ciało sztywne w postaci pręta oraz masy punktowej może obracać się wokół punktu 0. Do pręta zamocowane są sprężyna o sztywności k i tłumik o tłumieniu c . W chwili początkowej pręt jest w pozycji pionowej (bez wychylenia) ale posiada pewną prędkość kątową $\dot{\phi}(t=0)$.



Dane:

$$m_1 = 10 \text{ (kg)}, m_2 = 2 \text{ (kg)}, a = 0.1 \text{ (m)},$$

$$k = 100 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right), c = 5 \left(\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}} \right), \dot{\phi}(0) = 0.2, \phi(0) = 0 \text{ (rad)}$$

Szukane:

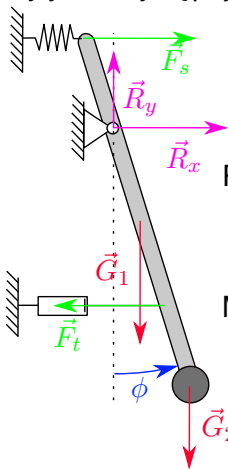
ω_o – częstość drgań własnych, u – częstość drgań tłumionych, $\phi(t)$ – równanie ruchu.

Ruch rozpatrzeć dla tzw. małych kątów.

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 1

Pręt zamocowany jest przegubowo co umożliwia jego obroty. Oznaczamy siły jakie występują w układzie.



$$G_1 = m_1 \cdot g, \quad G_2 = m_2 \cdot g, \quad F_s = k \cdot x_s, \quad F_t = \dot{x}_t \cdot c \quad (42)$$

Równanie dynamiki ruchu obrotowego:

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum M_0 \quad (43)$$

Momenty bezwładności:

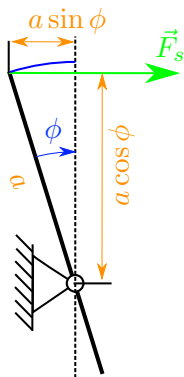
$$I_z = I_{z1} + I_{z2} = \frac{m_1 \cdot (4a)^2}{12} + m_1 \cdot a^2 + m_2 \cdot (3a)^2 \quad (44)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 2

Momenty sił biorące udział w ruchu:

$$\sum M_0 = M_s + M_t + M_{G_1} + M_{G_2} \quad (45)$$



Analiza działania momentu od sił sprężystości:

$$M_s = -F_s \cdot h = -k \cdot a \sin \phi \cdot a \cos \phi \quad (46)$$

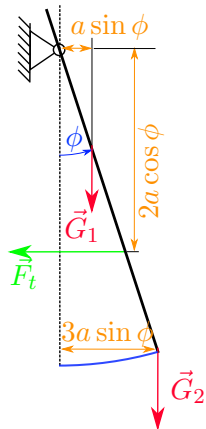
Po uproszczeniu dla tzw. małych kątów

$$\sin \phi \approx \phi, \cos \phi \approx 1$$

$$M_s = -k \cdot a^2 \cdot \phi \quad (47)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 3



Moment od tłumika:

$$M_t = -F_t \cdot h = -c \cdot \dot{x}_t \cdot 2a \cdot \cos \phi$$

$$\dot{x}_t = v_t = \omega \cdot 2a = \dot{\phi} \cdot 2a \quad (48)$$

$$M_t = -c \cdot \dot{\phi} \cdot (2a)^2$$

Momenty od sił grawitacji:

$$M_{G_1} = -G_1 \cdot a \cdot \sin \phi = -m_1 \cdot g \cdot a \cdot \phi$$

$$M_{G_2} = -G_2 \cdot 3a \cdot \sin \phi = -m_2 \cdot g \cdot 3a \cdot \phi \quad (49)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 3

Pisząc sumaryczne równanie otrzymujemy:

$$I_z \cdot \varepsilon = M_s + M_T + M_{G_1} + M_{G_2} \quad (50)$$

$$\left(\frac{m_1 \cdot (4a)^2}{12} + m_1 \cdot a^2 + m_2 \cdot (3a)^2 \right) \ddot{\phi} = -k \cdot a^2 \cdot \phi - c \cdot \dot{\phi} \cdot (2a)^2 - m_1 \cdot g \cdot a \cdot \phi - m_2 \cdot g \cdot 3a \cdot \phi \quad (51)$$

Podstawiając dane numeryczne:

$$0.413 \cdot \ddot{\phi} = -16.696 \cdot \phi - 0.2 \cdot \dot{\phi} \quad (52)$$

Końcowa postać równania:

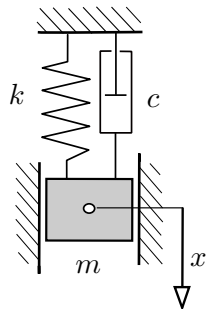
$$\ddot{\phi} + 0.484 \cdot \dot{\phi} + 40.426 \cdot \phi = 0 \quad (53)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 4

Analogia

Otrzymane równanie 53 jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Mimo występowania współrzędnej kątowej ϕ można je porównać z równaniem otrzymywanym dla układu drgającego liniowego punktu materialnego o jednym stopniu swobody.



Równanie dla punktu materialnego:

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{gdzie} \quad 2n = \frac{c}{m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (54)$$

$\omega_0 \rightarrow$ częstość drgań własnych,

$u = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} \rightarrow$ częstość drgań tłumionych.

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 5

Porównując bezpośrednio równania :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x &= 0 \\ \ddot{\phi} + 0.484 \cdot \dot{\phi} + 40.426 \cdot \phi &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Możemy wyznaczyć częstość drgań własnych:

$$\omega_0 = \sqrt{40.426} = 6.358 \left(\frac{1}{s} \right) \quad (56)$$

oraz częstość drgań tłumionych:

$$u = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = 6.353 \left(\frac{1}{s} \right) \quad (57)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 6

Pozostaje rozwiązanie równania różniczkowego w celu wyznaczenia funkcji $\phi(t)$:

$$\ddot{\phi} + 0.484 \cdot \dot{\phi} + 40.426 \cdot \phi = 0 \quad (58)$$

Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 + 0.484 \cdot \lambda + 40.426 = 0 \quad (59)$$

$$\Delta = 0.484^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40.426 = -161.469 \quad (60)$$

$$\alpha = \frac{-0.484}{2} = -0.242, \quad \beta = \frac{\sqrt{161.469}}{2} = 6.353 \quad (61)$$

Ogólna postać rozwiązania:

$$\phi = e^{\alpha t} (C_1 \cdot \sin(\beta t) + C_2 \cdot \cos(\beta t)) \quad (62)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 7

Podstawiając do końcowej postaci równania α i β :

$$\phi = e^{-0.242 t} (C_1 \cdot \sin (6.353 \cdot t) + C_2 \cdot \cos (6.353 \cdot t)) \quad (63)$$

Stałe C_1 i C_2 należy wyznaczyć z warunków początkowych. Odpowiednio w chwili czasu $t = 0$ i $\phi(0) = 0$:

$$0 = e^{-0.242 \cdot 0} (C_1 \cdot \sin (6.353 \cdot 0) + C_2 \cdot \cos (6.353 \cdot 0)) \quad (64)$$

co daje $C_2 = 0$. Dalej uzyskujemy wzór na prędkość z różniczkowania wzoru 63

$$\dot{\phi} = -0.242 \cdot e^{-0.242 t} \cdot C_1 \cdot \sin (6.353 \cdot t) + e^{-0.242 t} \cdot C_1 \cdot 6.353 \cdot \cos (6.353 \cdot t) \quad (65)$$

Przykład 4

Rozwiązanie cz. 8

Podstawiając dla prędkości $\dot{\phi}(t=0) = 0.2$ otrzymujemy:

$$0.2 = -0.242 \cdot e^{-0.242 \cdot 0} \cdot C_1 \cdot \sin(6.353 \cdot 0) + e^{-0.242 \cdot 0} \cdot C_1 \cdot 6.353 \cdot \cos(6.353 \cdot 0) \quad (66)$$

stąd $C_1 = 0.0315$ a końcowe rozwiązanie otrzymuje postać:

$$\phi = e^{-0.242 t} \cdot (0.0315 \cdot \sin(6.353 \cdot t)) \quad (67)$$

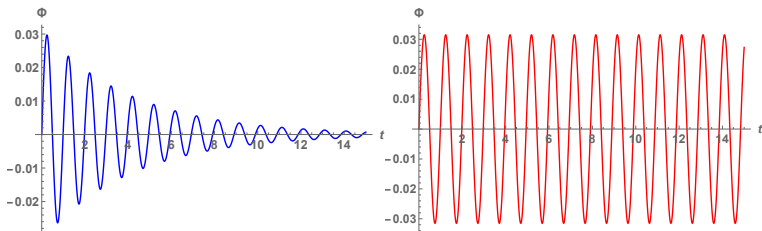


Figure: Przebiegi zmian kąta obrotu od czasu dla układu z tłumieniem i bez