MECHANIKA II. Dynamika układu punktów materialnych

Daniel Lewandowski

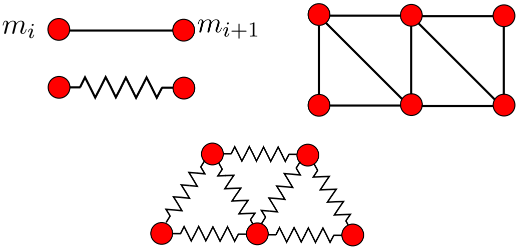
Politechnika Wrocławska, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

http://kmim.wm.pwr.edu.pl/lewandowski/

daniel.lewandowski@pwr.edu.pl

Układy punktów materialnych - stopnie swobody

Różnorodne układy punktów materialnych połączonych nieodkształcalnymi i nieważkimi prętami lub odkształcalnymi sprężynami.



Układ punktów materialnych

Zbiór punktów materialnych, w którym położenie każdego punktu jest zależne od położenia innych punktów.

Stopnie swobody

Stopniem swobody jest każda zmienna pozwalająca opisać stanu układu fizycznego, czyli położenie jego poszczególnych części w przestrzeni.

Ilość stopni swobody:

- 1 punkt materialny -> 3 stopnie swobody
- n-punktów -> 3*n stopni swobody

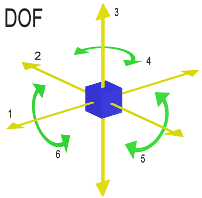
Bryła sztywna

Układ punktów nieswobodny lub swobodny

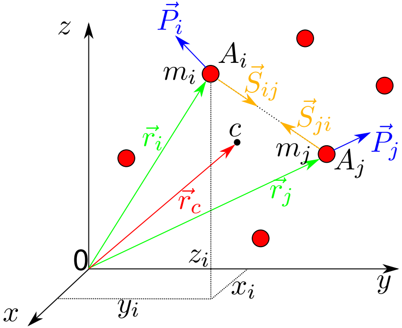
W zależności od przyłożonych więzów lub ich braku.

Bryła sztywna

Układ punktów punktów połączonych w taki sposób iż ich wzajemne odległości nie ulegają zmianie. Ilość stopni swobody dla układu swobodnego - 6.



Siły dla układu punktów



Elementy opisu:

- Punkty materialne A_i, A_j o masach m_i oraz m_j
- Siły zewnętrzne: $\vec{P}_i$, $\vec{P}_j$
- Siły wewnętrzne: $\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$

Ruch punktów układu zależny od sił zewnętrznych i wewnętrznych. Na każdy punkt A_i działa $n-1$ sił $\vec{S}_{ij}$ wobec czego sił wewnętrznych jest:

$$n(n-1) \tag{1}$$

Siły dla układu punktów - 2

Oddziaływanie masy m_i na masę m_j jest równe co do wartości jak m_j na m_i. Wobec tego suma wszystkich sił wewnętrznych:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_{ij} = 0 \tag{2}$$

Podobnie jest dla sumy momentów względem dowolnego bieguna:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_o(\vec{S}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\sum_{j=1}^{n}\vec{S}_{ij}) = 0 \tag{3}$$

Dynamika układu punktów

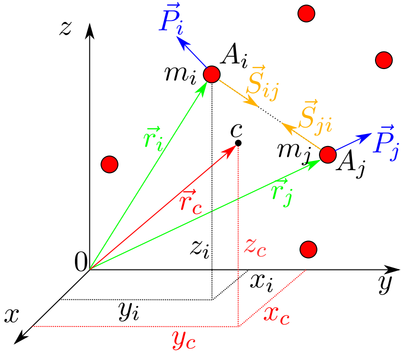
Punkt materialny układu można rozpatrywać jako punkt materialny **swobodny** na który działają siły zewnętrzne i wewnętrzne jako oddziaływania wszystkich pozostałych punktów układu.

Równanie różniczkowe dla i-tego punktu materialnego

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) = \vec{P}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{S}_{ij} \tag{4}$$

Dla n punktów będzie to $3n$ równań różniczkowych! Rozwiązanie takiego układu jest bardzo trudne i możliwe tylko w szczególnych przypadkach.

Środek masy układu



Środek masy układu to taki punkt c o współrzędnych x_c, y_c, z_c wskazywany przez wektor wodzący $\vec{r}_c$.

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad \text{gdzie :} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{5}$$

We współrzędnych kartezjańskich:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \\ y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \\ z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \end{cases}$$

Środek masy układu - 2

Środek ciężkości

Jeżeli układ punktów materialnych znajduje się w **jednorodnym** polu grawitacyjnym to środek masy pokrywa się ze środkiem ciężkości.

Zasada ruchu środka masy

Dla pojedynczego punktu równanie ruchu miało następującą postać:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) = \vec{P}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{S}_{ij} \tag{6}$$

Wypisując równania dla wysztkich n punktów bryły oraz sumując je do jednego równania otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{S}_{ij} \tag{7}$$

gdzie: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{S}_{ij} = 0$ ponieważ wszystkie sił wewnętrznych znoszą się wzajemnie.

Zasada ruchu środka masy - 2

Otrzymujemy z poprzedniego równania:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(m_i \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \tag{8}$$

Zakładając, że zmiany masy w czasie nie istnieją można napisać

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(m_i \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(m_i \vec{r}_i)}_{m\vec{r}_c} \tag{9}$$

a dalej :

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_c) = m\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \tag{10}$$

Zasada ruchu środka masy - 3

Sumarycznie można zapisać wszystkie siły zewnętrzne jako jedną siłę:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P} \tag{11}$$

a otrzymamy równanie opisujące ruch środa masy układu punktów materialnych:

$$m\vec{a}_c = \vec{P} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} m\ddot{x}_c = P_x \\ m\ddot{y}_c = P_y \\ m\ddot{z}_c = P_z \end{cases}$$

Zasada ruchu środka masy - 4

Podsumowując:

- Siły wewnętrzne nie maja wpływu na ruch środka masy
- Ruch środka masy nie zależy od tego, gdzie są przyłożone siły zewnętrzne (czyli od momentu ogólnego tych sił względem jakiegokolwiek punktu).

Zasada ruchu środka masy

Środek masy każdego układu punktów materialnych porusza się tak, jakby była w nim skupiona cała masa układu i jakby do tego punktu przyłożone były wszystkie siły zewnętrzne.

Zasada ruchu środka masy - 5

Jeżeli suma geometryczna sił zewnętrznych jest równa zero (znoszą się lub ich brak) to:

$$\vec{P} = 0 \implies m\vec{a}_c = 0 \implies \vec{a}_c = 0 \implies \vec{v}_c = \text{const} \tag{12}$$

Zasada zachowania ruchu środka masy

Jeżeli suma sił zewnętrznych działających na dany układ punktów materialnych jest równa zero to środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym.

Zasada ruchu środka masy pozwala wyznaczyć zmianę pędu ogólnego układu za pomocą pędu jednego tylko punktu c, w którym jest skupiona całkowita masa m (ale o tym będzie dalej).

Ruchu środka masy - przykłady

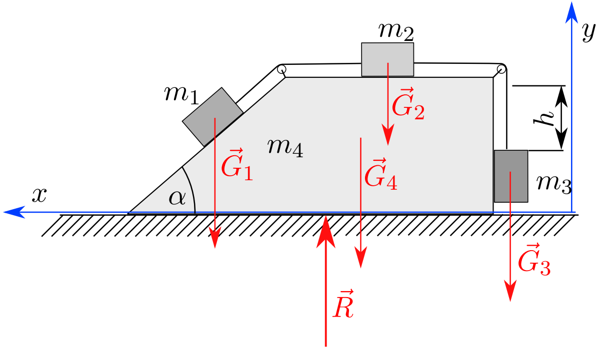
Skok wzwyż - dlaczego w takiej dziwnej pozycji ?

Fosbury Flop -> TED

Przykłady na ruch środka masy układu

Zadanie 1

Układ mas przedstawiony na rysunku znajduje się w spoczynku. Masy m_1, m_2, m_3 połączone są nieważką, nierozciągliwą liną przeciągniętą przez krążki. Powierzchnie współpracujące są gładkie - brak tarcia. Wyznaczyć przesunięcie masy m_4 jeśli ciężar m_3 przesunie się o wysokość h (na skutek działania sił wewnątrz układu).



Dane: m_1= 10 kg, m_2= 20 kg, m_3= 15 kg, m_4= 10 kg, α=30^o, h=0.5 m.

Szukane:
Przesunięcie masy m_4 względem układu współrzędnych xy.

Zadanie 1 - rozwiązanie cz.1

Zasada zachowania ruchu środka masy

Korzystając z pozostawania w spoczynku układu nas możemy napisać:

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{P}_i \implies m_c\ddot{x} = \sum P_{xi} = 0 \tag{13}$$

$$\implies m_c\dot{x}_c = C_1 \implies m_c x_c = C_1 t + C_2 \tag{14}$$

$$\dot{x}_c = 0, x_c = const. \implies C_1 = 0, C_2 = const. \tag{15}$$

$$m x_c = C_2 \implies x_c = const. \tag{16}$$

Wniosek

Oznacza to, iż mimo zmiany położenia poszczególnych mas środek ciężkości całego układu musi pozostawać w tym samym miejscu.

Zadanie 1 - rozwiązanie cz.2

Zadanie rozwiązujemy porównując położenie przed i po przesunięciu ciężarów m_1, m_2 i m_3. Środek ciężkości układu obliczamy na podstawie sumy środków ciężkości poszczególnych mas wchodzących w nasz układ.

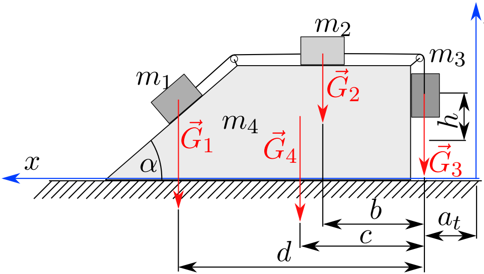
$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{4} m_i x_i \quad \text{gdzie} \quad m = \sum_{i=1}^{4} m_i \tag{17}$$

Uwzględniając siły grawitacji:

$$mgx_c = \sum_{i=1}^{4} m_i g x_i \tag{18}$$

$$Gx_c = \sum_{i=1}^{4} G_i x_i \tag{19}$$

Zadanie 1 - rozwiązanie cz.3



Zapisując położenie przed przesunięciem (a_0) i po przesunięciu (a_1) otrzymamy:

$$G_1(d + a_0) + G_2(b + a_0) + G_3\, a_0 + G_4(a_0 + c) = \sum_{i=1}^{4} G_i x_i \qquad (20)$$

$$G_1(d - h\cos\alpha + a_1) + G_2(b - h + a_1) + G_3 a_1 + G_4(a_1 + c) = \sum_{i=1}^{4} G_i x_i \qquad (21)$$

Zadanie 1 - rozwiązanie cz.4

Porównując powyższe równania otrzymamy:

$$\begin{gathered} G_1(d+a_0)+G_2(b+a_0)+G_3\ a_0+G_4(a_0+c)= \\ G_1(d-h\cos\alpha+a_1)+G_2(b-h+a_1)+G_3a_1+G_4(a_1+c) \end{gathered} \tag{22}$$

Przekształcając i porządkując otrzymujemy:

$$G_1(a_0-a_1)+G_2(a_0-a_1)+G_3(a_0-a_1)+G_4(a_0-a_1)=-G_1h\cos\alpha-G_2h \tag{23}$$

$$(G_1+G_2+G_3+G_4)(a-a_1)=-G_1h\cos\alpha-G_2h \tag{24}$$

$$a_0-a_1=\Delta x=\frac{-G_1h\cos\alpha-G_2h}{G_1+G_2+G_3+G_4} \tag{25}$$

Zadanie 1 - rozwiązanie cz.5

Podstawiając dane numeryczne:

$$\Delta x = \frac{-10 \cdot 0.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cdot 0.5}{10 + 20 + 15 + 10} = -0.26 \text{ m} \tag{26}$$

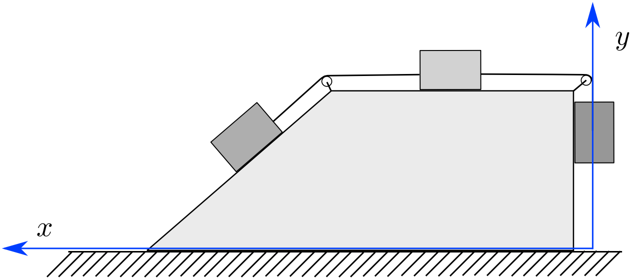
Przyjmując zwrot układu w lewą stronę i początek układu dla $a_0 = 0$ otrzymujemy:

$$\Delta x = a_0 - a_1 \tag{27}$$

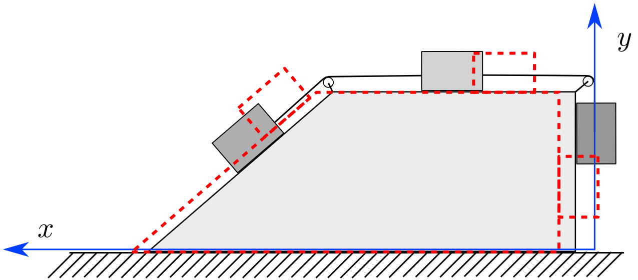
$$-0.26 = 0 - a_1 \implies a_1 = 0.26 \text{ m} \tag{28}$$

Oznacza to iż klocek m_4 przesunie się w lewą stronę.

Zadanie 1 - rozwiązanie cz.6



Zadanie 1 - rozwiązanie cz.6



Pęd układu punktów materialnych

Pęd układu jest zdefiniowany jako suma poszczególnych pędów:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i \tag{29}$$

Suma pędów

Pęd całkowity $\vec{H}$ może być równy zero mimo, że jego poszczególne składowe nie są zerowe. Suma pędów dodatniego i ujemnego może się znosić.

Analizując pęd układu punktów możemy napisać:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_c) = m\vec{v}_c \tag{30}$$

gdzie: c to środek masy układu, $\vec{r}_c$ to wektor opisujący jego położenie, $\vec{v}_c$ wektor prędkości środka masy.

Zmiana pędu układu punktów materialnych

Analizując **zmianę** pędu układu otrzymamy:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dH_x}{dt} = m\ddot{x}_c = P_x \\ \frac{dH_y}{dt} = m\ddot{y}_c = P_y \\ \frac{dH_z}{dt} = m\ddot{z}_c = P_z \end{cases} \tag{31}$$

Zasada zmiany pędu

Pochodna względem czasu pędu układu punktów materialnych równa jest sumie geometrycznej wszystkich sił zewnętrznych działających na punkty tego układu.

Przyrost pędu

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{P} \implies d\vec{H} = \vec{P}dt \implies \int_{H_1}^{H_2} d\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}dt \tag{32}$$

$$\Delta\vec{H} = H_2 - H_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{P}dt \tag{33}$$

Przyrost pędu układu punktów materialnych jest równy popędowi sumy geometrycznej sił zewnętrznych.

Zasada zachowania pędu dla układu punktów materialnych

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = 0 = m\vec{a}_c \implies \vec{H} = m\vec{v}_c = const. \tag{34}$$

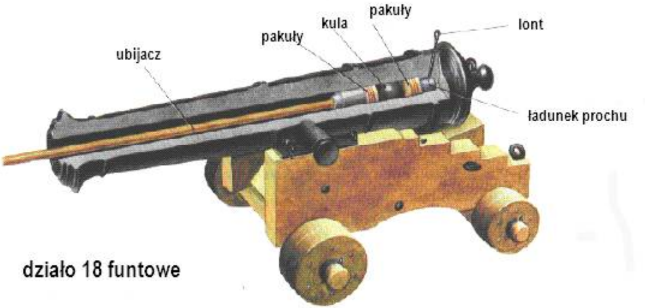
Zasada zachowania pędu

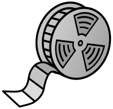
Jeżeli suma sił działających na układ punktów materialnych jest równa zero to pęd ma wartość stałą. Oznacza to, że środek masy ciała znajduje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym.

Przydatne do ...

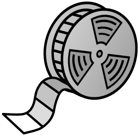
zagadnień dynamicznych i sił chwilowych. Przykłady za chwilę.

Zasada zachowania pędu - przykłady





Zasada zachowania pędu - przykłady



Kręt układu punktów materialnych

Inaczej moment pędu

Kręt dla układu punktów zdefiniowany jest jako suma poszczególnych krętów:

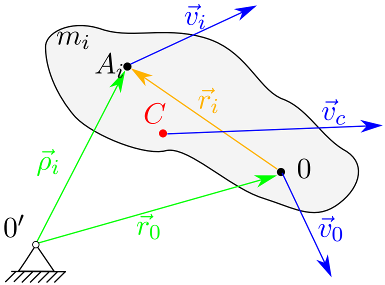
$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_{i0} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m\vec{v}_i) \implies \begin{cases} K_x = \sum_{i=1}^{n} K_{ix} \\ K_y = \sum_{i=1}^{n} K_{iy} \\ K_z = \sum_{i=1}^{n} K_{iz} \end{cases} \tag{35}$$

Kręt układu punktów materialnych względem osi układu współrzędnych x, y, z jest równy sumie krętów wszystkich punktów układu względem tych osi.

Kręt układu punktów materialnych

Liczymy kręt układu punktów materialnych względem dowolnego punktu 0. Możemy go zapisać następująco:

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{H}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\rho}_i - \vec{r}_0) \times \vec{H}_i \qquad (36)$$



Licząc pochodną krętu względem czasu otrzymamy:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\vec{\rho}}_i \times \vec{H}_i - \dot{\vec{r}}_0 \times \vec{H}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{H}}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times \vec{H}_i - \vec{v}_0 \times \vec{H}_i) + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \dot{\vec{H}}_i \qquad (37)$$

Zasada krętu dla układu punktów

Kontynuując poprzednie rozważania otrzymujemy:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times \vec{H}_i - \vec{v}_0 \times \vec{H}_i) + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \dot{\vec{H}}_i \tag{38}$$

$$\dot{\vec{K}}_0 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i - \vec{v}_0 \times \vec{H}_i) + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{P}_i \tag{39}$$

$$\dot{\vec{K}}_0 = -\vec{v}_0 \times \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i + \vec{M}_0 \tag{40}$$

W przypadku gdy prędkość bieguna 0 jest równa zero ($\vec{v}_0 = 0$) lub $\vec{v}_0 = \vec{v}_c$, wyrażenie $\vec{v}_0 \times \vec{H} = 0$. Co daje:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}_0 \tag{41}$$

Zasada zachowania krętu dla układu punktów

Z równania

$$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}_0 \tag{42}$$

możemy wysnuć następujący wniosek:

Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych względem dowolnego punktu 0 równa się sumie geometrycznej momentów sił zewnętrznych, jeżeli punktem 0 jest punkt nieruchomy lub środek masy układu.

Przekształcając powyższe równanie otrzymamy:

$$\dot{\vec{K}}_0 = \frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0 \implies d\vec{K}_0 = \vec{M}_0 \, dt \tag{43}$$

Całkując dalej:

$$\int_{K_1}^{K_2} d\vec{K}_0 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0 \, dt \tag{44}$$

Zasada zachowania krętu dla układu punktów

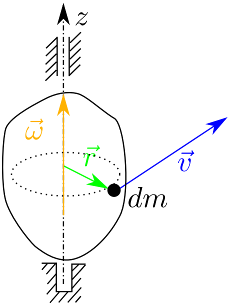
Ostatecznie otrzymujemy równanie :

$$\Delta \vec{K}_0 = \vec{K}_{20} - \vec{K}_{10} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0 \, dt \tag{45}$$

Zasada zachowania krętu

Jeżeli suma geometryczna momentów sił zewnętrznych względem punktu stałego 0 lub środka masy wynosi zero, to kręt układu względem tych punktów ma wartość stałą.

Rozpatrzymy przypadek obrotu układu punktów materialnych wokół ustalo osi. Punkty są rozłożona jest po pewnej objętości - do analizy wybieramy jeden punkt elementarny o masie dm.



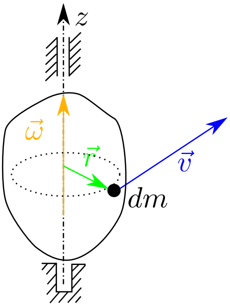
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \ \text{lub} \ \ v = \omega \cdot r \tag{46}$$

Elementarny kręt wynosi:

$$dK = v \cdot r \, dm = \omega \cdot r \cdot r \, dm \tag{47}$$

Dla układu punktów:

$$K_z = \int_M dK = \int_M \omega \cdot r^2 \, dm \tag{48}$$



$$K_z = \int_M \omega \cdot r^2 \, dm \tag{49}$$

Ponieważ prędkość obrotowa jest taka sama dla każdego z punktów bryły - można ja wyciągnąć przed całkę i otrzymać:

$$K_z = \omega \int_M r^2 \, dm = \omega I \tag{50}$$

gdzie I jest momentem bezwładności dla układu punktów materialnych względem osi z.

Po co w helikopterze ogon ?

Brak siły na ogonie -> Youtube

Zasada zachowania krętu układu punktów - przykłady

Jak kot spada zawsze na cztery łapy?

Smarter Every Day Cats falling -> Youtube