MECHANIKA II. Praca i energia punktu materialnego

Daniel Lewandowski

Politechnika Wrocławska, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

http://kmim.wm.pwr.edu.pl/lewandowski/

daniel.lewandowski@pwr.edu.pl

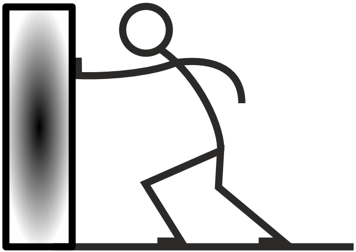
Praca sił

Pojęcie pracy

Pojęcie pracy jest nierozerwalne związane z przemieszczeniem. Dla stałej siły działającej na prostoliniowym odcinku możemy napisać:

$$L = F \cdot s \qquad (N \cdot m) = (J) \tag{1}$$

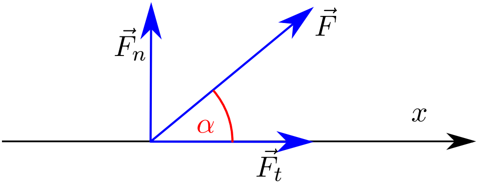
Zgodnie żartem o wykonaniu pracy nad ścianą nie zawsze można się napracować.



Pojęcie pracy

Jeżeli siła tworzy z kierunkiem przesunięcia kąt α to możemy napisać:

$$L = F_t \cdot s = F \cdot \cos\alpha \tag{2}$$



Praca sił

Właściwości pracy

- Jest skalarem
- Może przyjmować wartości dodatnie, ujemne jak i równe zero
- Pracę wykonuje jedynie składowa styczna do toru ruchu punktu

Praca elementarna

Przesunięcie elementarne:

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} \tag{3}$$

Definiujemy pracę elementarną:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos{(\vec{F}, \vec{s})} = F_t \cdot ds \tag{4}$$

Sumując poprzednie wzory otrzymamy:

$$dL = F_x \cdot dx + Fy \cdot dy + F_z \cdot dz \tag{5}$$

Praca siły na pewnym przesunięciu jest równa sumie iloczynów sił i przemieszczeń na odpowiednich przemieszczeniach składowych.

Praca całkowita

Całkowitą pracę sił na zadanym przemieszczeniu z położenia s_1 do s_2 otrzymamy przez sumowanie prac elementarnych:

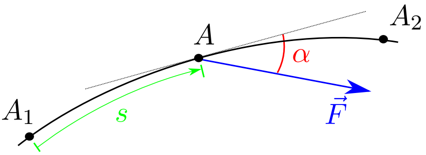
$$L_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} dL = \int_{s_1}^{s_2} (F_x \cdot dx + Fy \cdot dy + F_z \cdot dz) \tag{6}$$

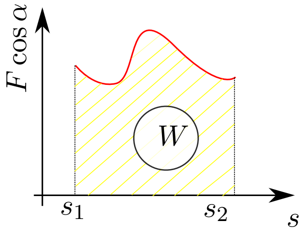
$$L_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \tag{7}$$

Szczególny przypadek

Dla pewnych wybranych działań siła F wykonująca pracę zależy tylko od położenia tego punktu. Wówczas można miarą rzutu siły na styczną do toru ($F \cdot \cos\alpha$) wyrazić zależność od współrzędnej łukowej odmierzanej wzdłuż toru punktu.

$$L_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot \cos\alpha \, ds = W \quad (8)$$





Moc

Zakładamy że w ciągu czasu dt punkt na skutek przyłożenia siły $\vec{F}$ doznaje elementarnego przesunięcia $d\vec{s}$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{9}$$

Moc

Pracę wykonaną przez siłę w ciągu jednostki czasu nazywamy mocą tej siły i liczmy następująco:

$$N = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cos \alpha \tag{10}$$

Jednostką mocy jest Wat lub częściej w technicznych zastosowaniach koń mechaniczny (1 KM = 0.736 kW).

Potencjalne pole sił

Pole sił

Szczególnie ważne znaczenie maja siły działające na punkt a zależne od jego położenia. Takie siły działające jako funkcja położenia tworzą pole sił.

Pole sił

Możemy też mówić o pewnej przestrzeni posiadającej taką właściwość, że na dowolnie umieszczony w niej punkt materialny działa ściśle określona siła zależna tylko od położenia tego punktu.

Pole sił

W polu sił na poruszający się punkt materialny działa siła zależna od tego w którym miejscu pola sił się on znajduje. Możemy to pole określić równaniem:

$$\vec{F} = \vec{F}(r) \quad \text{lub} \quad \vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \tag{11}$$

Linie sił

Linie tych sił określamy jako linie styczne w każdym punkcie pola do wektorów sił. Równanie różniczkowe tych linii ma postać:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{12}$$

Pole sił

Natężenie pola

Natężeniem pola nazywamy siłę działającą na punkt materialny o jednostkowej masie.

Podział pól

Pola sił możemy podzielić na:

- jednorodne (linie sił równoległe, siły stałe co do kierunku i wartości) - przykładem pole grawitacyjne blisko powierzchni ziemi
- niejednorodne

Pole potencjalne

Istnieje pewna klasa pól o takiej właściwości, że praca sił pola działającego na poruszający się punkt materialny zależy jedynie od początkowego i końcowego punktu przyłożenia a nie od drogi jaka przebywa. Z takim przypadkiem mamy do czynienia, gdy istnieje taka funkcja skalarna V że siła $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\nabla V, \; F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{13}$$

Stąd wyrażenie na pracę przyjmuje postać:

$$L = -\int_{AB} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \tag{14}$$

$$L = -\int_{V_A}^{V_B} dV = V_A - V_B \tag{15}$$

Potencjał

Potencjał

jest to w matematycznej teorii pola taka funkcja skalarna V, której gradient określa pole wektorowe.

Energia potencjalna

W mechanice funkcję V nazywa się energią potencjalną, pole sił - polem zachowawczym a siły tego pola potencjalnymi.

Pole zachowawcze

Pole sił nazywa się zachowawczym gdy praca w polu sił nie zależy od drogi przejścia a jedynie od położenia punktu początkowego i końcowego. Niezachowawcze pole sił występuje np. dla sił tarcia. Ruch na określonym odcinku wymaga pracy, która zostanie zamieniona w ciepło.

Pole potencjalne

Powierzchnia ekwipotencjalna

Miejsce geometryczne punktów dla których energia potencjalna $V(x, y, z) =$const. nazywamy powierzchnią ekwipotencjalną.

Bezwirowe pole

Jak wynika z matematycznej teorii pola, pole sił ma potencjał gdy jest polem bezwirowym, czyli :

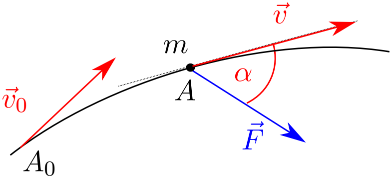
$$B = rot(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{17}$$

Są to warunki konieczne i wystarczające by istniał potencjał pola sił i by było ono zachowawcze.

Energia kinetyczna

Rozważamy ruch punktu materialnego o masie m po krzywoliniowym torze.



gdzie: $\vec{F}$ - wypadkowa wszystkich sił działających na punkt, α - kat stycznej do toru.

Równanie dynamiki ruchu wygląda następująco:

$$ma = F\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha \tag{18}$$

Energi kinetyczna

Mnożymy obie strony przez prędkość:

$$vm\frac{dv}{dt} = vF\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = vF\cos\alpha \tag{19}$$

Uwzględniają że $v = \frac{ds}{dt}$ możemy zapisać:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv\cos\alpha\ dt \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\cos\alpha\ ds \tag{20}$$

$$\underbrace{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}_{E_k} = \underbrace{F\cos\alpha\ ds}_{dL} \tag{21}$$

Energia Kinetyczna

Całkując obustronnie powyższe równanie otrzymujemy:

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{x_1}^{x_2} dL \tag{22}$$

Ostatecznie możemy zapisać:

$$\frac{m{v_1}^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = L \quad \Rightarrow \quad E_{k_1} - E_{k_0} = L \tag{23}$$

Twierdzenie o energii kinetycznej i pracy

Przyrost energii kinetycznej punktu materialnego w skończonym czasie jest równy sumie prac, które wykonały w tym samym czasie wszystkie siły działające na ten punkt

Energia mechaniczna

W przypadku gdy punkt materialny porusza się w zachowawczym polu sił wówczas praca równa się różnicy potencjałów:

$$L = V_0 - V_1 \tag{24}$$

Porównując to z pracą dla zmian energii kinetycznej możemy zapisać:

$$V_0 - V_1 = E_{k_1} - E_{k_0} \quad \Rightarrow \quad V_0 + E_{k_0} = V_1 + E_{k_1} = const. \tag{25}$$

Energia mechaniczna

Suma energii kinetycznej i potencjalnej daje tzw. energię mechaniczną. Z powyższego równania wynika także zasada zachowania energii mechanicznej. Dla punktu poruszającego się w zachowawczym polu sił suma jego energii potencjalnej i kinetycznej jest wartością stałą.