MECHANIKA II. Drgania wymuszone

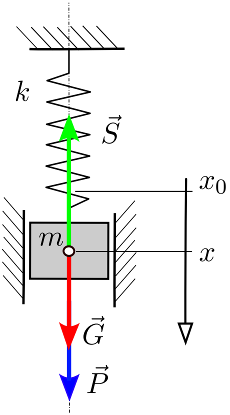
Daniel Lewandowski

Politechnika Wrocławska, Wydział Mechaniczny,
Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

http://kmim.wm.pwr.edu.pl/lewandowski/

daniel.lewandowski@pwr.edu.pl

Układ drgający o jednym stopniu swobody



Założenia i warunki:

- Masa m $[kg]$ zawieszona na sprężynie o sztywności k $[N/m]$
  - Siła sprężystości $\vec{S} = -k\vec{x}$
  - Siła grawitacji $\vec{G} = m\vec{g}$
    - Ugięcie statyczne $\lambda_{st} = \frac{mg}{k}$ $[m]$
- Dodatkowa siła zewnętrzna $\vec{P}$
  - Najczęściej o charakterze okresowym $P = P_a \sin(\omega t)$, gdzie: P_a – amplituda siły wymuszającej ω – częstość siły wymuszającej.

Równanie ruchu - wychodząc z drugiej zasady dynamiki

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{1}$$

Równanie różniczkowe układu z dodatkową siłą

Podstawiając do równania (1) otrzymujemy:

$$m\vec{a} = \vec{S} + \vec{G} + \vec{P} \tag{2}$$

Uwzględniając warunki swobody dla układu, jedną oś:

$$m\ddot{x} = -k(x + \lambda_{st}) + mg + P_a \sin(\omega t) \tag{3}$$

oraz ugięcie statyczne:

$$m\ddot{x} = -kx + P_a \sin(\omega t) \tag{4}$$

Ostateczna postać równania różniczkowego

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \frac{P_a}{m} \sin(\omega t) \tag{5}$$

gdzie częstość drgań własnych:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego

Równania różniczkowe (5) jest równaniem drugiego stopnia, o stałych współczynnikach, niejednorodnym. Jego rozwiązanie wygląda następująco:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_o t) + C_2 \sin(\omega_o t) + \frac{P_a}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \tag{7}$$

$$\dot{x}(t) = -C_1 \omega_o \sin(\omega_o t) + C_2 \omega_o \cos(\omega_o t) + \frac{P_a}{m} \frac{\omega}{\omega_o^2 - \omega} \cos(\omega t) \tag{8}$$

Przyjmując warunki początkowe w postaci:

$$x(t=0) = x_o \quad \text{oraz} \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_o \tag{9}$$

wyliczamy stałe całkowania:

$$C_1 = x_o \quad \text{oraz} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_o}{\omega_o} - \frac{\omega P_a}{\omega_o m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2} \tag{10}$$

Ostatecznie po podstawieniu stałych całkowania otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
x(t) \quad = \quad & \underbrace{x_o \cos(\omega_o t) + \frac{\dot{x}_o}{\omega_o}\sin(\omega_o t)}_{I+II} - \\
& \underbrace{\frac{P_a \omega}{m\omega_o(\omega_o^2 - \omega^2)}\sin\omega_o t}_{III} + \\
& \underbrace{\frac{P_a}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}\sin\omega t}_{IV}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

- $I + II$ – drgania własne układu wynikające z przyjętych warunków początkowych $\left(x(t=0), \dot{x}(t=0)\right)$.
- III – drgania o częstości własnej układu ω_o zależne od amplitudy P_a i częstości siły wymuszającej ω.
- IV – drgania wymuszone o częstości siły wymuszającej ω.

Jak wpływają poszczególne człony równania??

Rozpatrzmy zachowanie elementu III-go, który zapiszemy w następującej postaci:

$$A_1 \sin \omega_o t \quad \text{gdzie} \quad A_1 = \frac{P_a \omega}{m\omega_o(\omega_o^2 - \omega^2)} \tag{12}$$

A_1 - amplitudę sygnału porównujemy do ugięcia statycznego $\lambda_{st(P_a)}$, które powstało by przy oddziaływaniu stałej siły P_a.

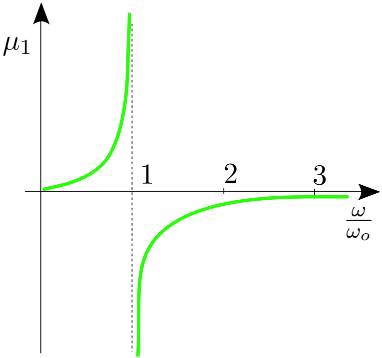
Wprowadzamy współczynnik wzmocnienia μ_1

$$\mu_1 = \frac{A_1}{\lambda_{st(P_a)}} \quad \text{gdzie} \quad \lambda_{st(P_a)} = \frac{P_a}{k} \tag{13}$$

Podstawiając:

$$\mu_1 = \frac{P_a \omega}{m\omega_o(\omega_o^2 - \omega^2)} \frac{k}{P_a} = \frac{\omega \omega_o}{\omega_o^2 - \omega} \tag{14}$$

Analiza członu III – współczynnik μ_1



Upraszczają i przekształcając do wygodnej postaci wyrażenie na μ_1 otrzymujemy:

$$\mu_1 = \frac{\frac{\omega}{\omega_o}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} \tag{15}$$

Charakter zmian μ_1 w zależności od stosunku częstości $\frac{\omega}{\omega_o}$ pokazano na rysunku obok. Wyraźnie widać asymptote gdy:

$$\frac{\omega}{\omega_o} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad \boldsymbol{\omega = \omega_o} \quad \textbf{!!!}$$

Zapisujemy element IV-y w postaci:

$$A_2 \sin \omega t \quad \text{gdzie} \quad A_2 = \frac{P_a \omega}{m\omega_o(\omega_o^2 - \omega^2)} \tag{16}$$

A_2 - amplitudę sygnału porównujemy do ugięcia statycznego $\lambda_{st(P_a)}$, które powstanie przy oddziaływaniu stałej siły P_a.

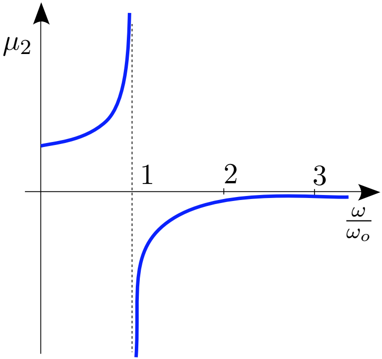
Wprowadzamy współczynnik wzmocnienia μ_2

$$\mu_2 = \frac{A_2}{\lambda_{st(P_a)}} \quad \text{gdzie} \quad \lambda_{st(P_a)} = \frac{P_a}{k} \tag{17}$$

Podstawiając:

$$\mu_2 = \frac{P_a}{m\omega_o(\omega_o^2 - \omega^2)} \frac{k}{P_a} = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \tag{18}$$

Analiza członu IV – współczynnik μ_2



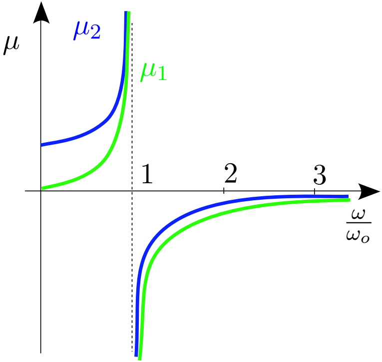
Upraszczają i przekształcając do wygodnej postaci wyrażenie na μ_2 otrzymujemy:

$$\mu_2 = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} \tag{19}$$

Charakter zmian μ_2 w zależności od stosunku częstości $\frac{\omega}{\omega_o}$ pokazano na rysunku obok. Wyraźnie widać asymptote gdy:

$$\frac{\omega}{\omega_o} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad \boldsymbol{\omega = \omega_o} \quad \textbf{!!!}$$

Rezonans



Analizując zależności na μ_1 i μ_2, widać iż obie wartości rosną do nieskończoności gdy: $\boldsymbol{\omega = \omega_o}$ Inaczej mówiąc: jeżeli częstość siły wymuszającej nasz układ ω pokrywa się z częstością drgań własnych ω_o tegoż układu, to amplituda jego drgań rośnie do nieskończoności.

Takie zjawisko nazywamy
REZONANSEM

Natomiast częstość drgań wymuszających $\omega = \omega_o$ nazywamy częstością rezonansową.

Analizując zachowanie członów III+IV możemy napisać:

$$\underbrace{-\frac{P_a\omega}{m\omega_o(\omega_o^2-\omega^2)}\sin\omega_o t}_{III}+\underbrace{\frac{P_a}{m(\omega_o^2-\omega^2)}\sin\omega t}_{IV} \tag{20}$$

sumując i przekształcając otrzymamy:

$$\frac{-P_a(\omega\sin\omega_o t-\omega_o\sin t)}{m\omega_o(\omega_o^2-\omega^2)}=\frac{\frac{P_a}{m}(-\frac{\omega}{\omega_o}\sin\omega_o t+\sin\omega t)}{\omega_o^2-\omega^2} \tag{21}$$

Rozpatrując zachowanie się wyrażenia (21), które jest w granicy nieoznaczone $\frac{0}{0}$, musimy skorzystać z reguły *L'Hospitala*. Zamieniamy licznik i mianowniki wyrażenia na jego pochodne względem ω:

$$\lim_{\omega\to\omega_o}\frac{\frac{P_a}{m}(-\frac{1}{\omega_o}\sin\omega_o t+t\cos\omega t)}{-2\omega}=\frac{P_a}{2m\omega_o}(\sin\omega_o t-\omega_o t\cos\omega_o t) \tag{22}$$

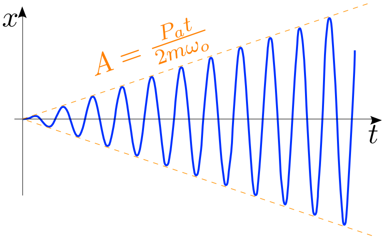
Rozwiązanie równania ruchu (11) otrzyma w przypadku granicznym, gdy $\omega \to \omega_o$ następującą postać:

$$x(t) = \underbrace{x_o \cos \omega_o t + \frac{\dot{x}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t}_{I+II} - \underbrace{\frac{P_a}{2m\omega_o^2} \sin \omega_o t}_{III} + \underbrace{\frac{P_a \cancel{\omega}_o t}{2m\omega_o^{\cancel{2}}} \cos \omega_o t}_{IV} \qquad (23)$$

Wraz ze wzrostem czasu człony I, II, III, stają się pomijalnie małe stosunku do członu IV. Przyjmując umownie za amplitudę drgań wyrażenie:

$$A = \frac{P_a t}{2m\omega_o} \qquad \text{w granicy} \qquad \lim_{t \to \infty} A = \infty \qquad (24)$$

Amplituda w rezonansie



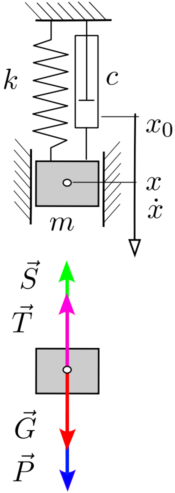
Amplituda drgań A rośnie do nieskończoności gdy częstość oddziaływania siły wymuszającej pokrywa się z częstością drgań własnych obiektu $\boldsymbol{\omega = \omega_o}$. Mówimy wtedy, że obiekt wpadł w rezonans.

Rezonans

Rezonans układów mechanicznych jest bardzo NIEBEZPIECZNY, ponieważ wzrost amplitudy drgań doprowadza bardzo szybko do ich zniszczenia. Przeciwdziałanie występowaniu rezonansu:

- unikanie wymuszania siłami o częstościach bliskich częstości własnych układu (pokrycia w wymuszeniem)
- tłumienie drgań

Układ drgający o jednym stopniu swobody z tłumieniem



Założenia i warunki identyczne jak dla układu bez tłumienia z uwzględnieniem:

- W układzie pojawia tłumienie (dyssypacja energii) się na skutek np. oporu ośrodka lub zewnętrznej siły
- Współczynnik tłumienia stały – c
- Siła tłumienia $\overrightarrow{T}$ ma charakter wiskotyczny, zależny od prędkości o wartości przeciwnej do prędkości $\dot{x}$.
- Dodatkowa siła zewnętrzna $\overrightarrow{P}$
  - Najczęściej o charakterze okresowym $P = P_a \sin(\omega t)$, gdzie: P_a – amplituda siły wymuszającej ω – częstość siły wymuszającej.

Równanie ruchu - wychodząc z drugiej zasady dynamiki

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i \tag{25}$$

Podstawiając siły do powyższego równania otrzymujemy:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \tag{26}$$

Uwzględniając warunki dla układu, oś oraz ugięcie statyczne:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x + \lambda_{st}) - c\dot{x} + mg + P_a \sin(\omega t) \\ m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x} + P_a \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{27}$$

Ostateczna postać równania różniczkowego

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_o^2 x = q \sin(\omega t) \tag{28}$$

gdzie:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}\ , \qquad 2n = \frac{c}{m} \quad \text{oraz} \quad q = \frac{P_a}{m} \tag{29}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego dla układu z tłumieniem

Równania różniczkowe (28) jest równaniem drugiego stopnia, o stałych współczynnikach, niejednorodnym. Jego rozwiązanie wygląda następująco:

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{gdzie:} \qquad x_1 = r_o \exp^{-nt} \cos(ut + \varphi_o) \tag{30}$$

$$x_2 = A \sin(\omega t - \delta) \tag{31}$$

Stałe A i δ są tak dobrane by równanie było spełnione tożsamościowo i wynoszą:

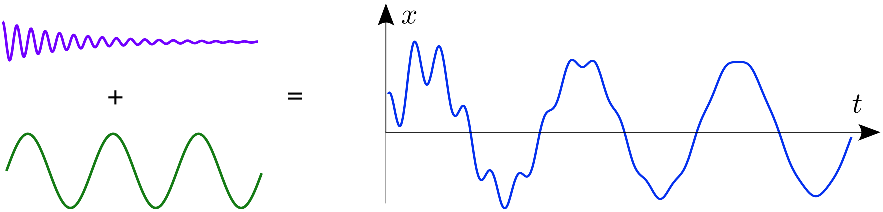
$$\tan \delta = \frac{-2n\omega}{\omega_o^2 - \omega} \quad , \qquad A = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} \tag{32}$$

Rozwiązanie ogólne otrzymujemy ostatecznie w postaci:

$$x(t) = \underbrace{r_o \exp^{-nt} \cos(ut + \varphi_o)}_{I} + \underbrace{\frac{q}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta)}_{II} \qquad (33)$$

Analizując powyższe równanie można opisać wpływ poszczególnych członów:

- Człon I – są to zanikające drgania własne układu
- Człon II – są to utrzymujące się drgania wzbudzane z częstością siły wymuszającej ω



Amplitudę sygnału (wzór 32) możemy przekształcić następująco:

$$A = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\gamma^2\beta^2}} \tag{34}$$

gdzie:

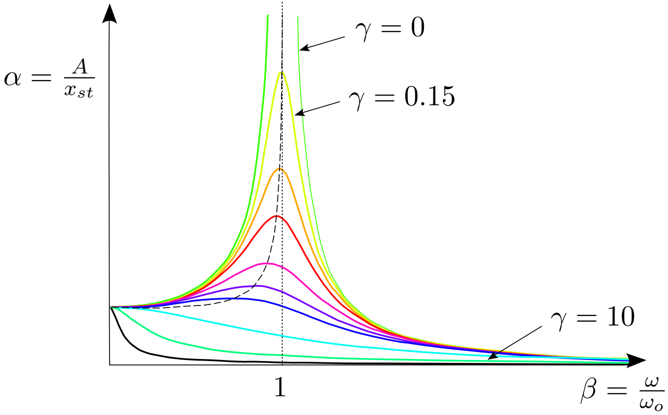
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_o}, \quad \gamma = \frac{n}{\omega_o}, \quad x_{st} = \frac{qm}{k} \tag{35}$$

Wprowadzamy dla ułatwienia współczynnik wzmocnienia amplitudy α:

$$\alpha = \frac{A}{x_{st}} \tag{36}$$

Charakterystyka amplitudowo–częstotliwościowa

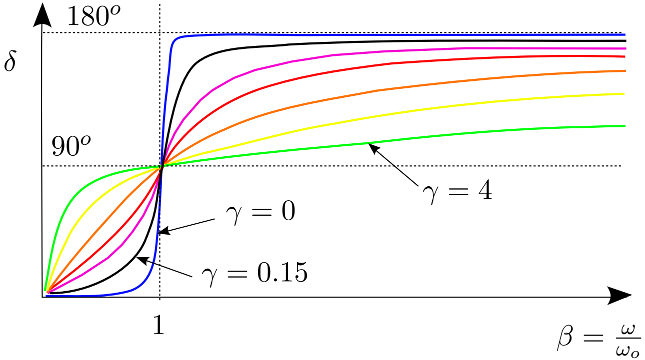
Analizując współczynnik wzmocnienia amplitudy α możemy narysować krzywe rezonansowe pokazujące charakterystyki w zależności od współczynnika tłumienia:



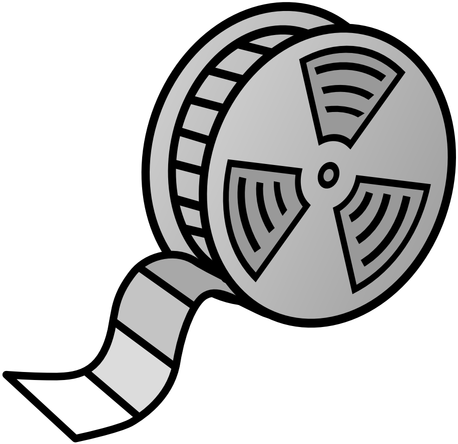
Charakterystyka fazowa

Tłumienie ma silny wpływ na wartość kąta przesunięcia fazowego δ pomiędzy siłą wymuszającą a odpowiedzią układu, jego przemieszczeniem $x(t)$.

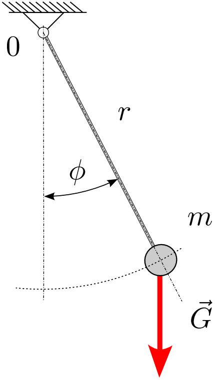
$$\tan\delta = \frac{-2n\omega}{\omega_o^2 - \omega} = \frac{2\gamma\beta}{1-\beta^2} \tag{37}$$



Rezonans układu jednomasowego



Wahadło – drgania



Równanie różniczkowe wahadła matematycznego, bez uwzględniania oporów ruchu, wygląda następująco:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{r}\phi = 0 \tag{38}$$

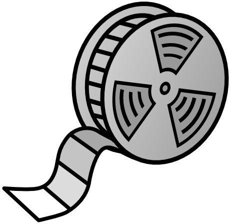
Przez analogię i porównanie z równaniem układu drgającego o jednym swobody możemy zapisać:

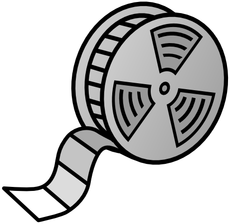
$$\ddot{\phi} + \omega_o^2\phi = 0 \quad \text{gdzie} \quad \omega_o^2 = \frac{g}{r}, \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{r}} \tag{39}$$

Ważny wniosek

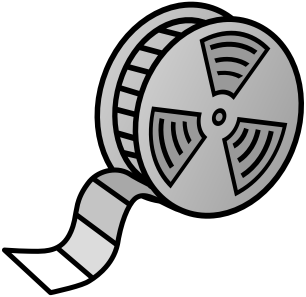
Częstość drgań wahadła nie zależy od jego masy a jedynie od długości ramienia r oraz przyspieszenia ziemskiego g.

Rezonans wahadła





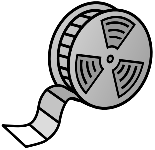
Katastrofa mostu Tacoma

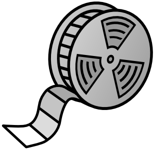


Tacoma Bridge

Źródła drgań

Źródłem drgań w układach mechanicznych są różnorakie siły, których pochodzenia należy szukać w otaczającym daną konstrukcję środowisku. Często zdarza się, że źródłem drgań wymuszonych są siły, powstające wewnątrz układu mechanicznego a spowodowane ruchem pewnych elementów i ich bezwładnością. Przykładem może być silnik którego prędkość obrotowa może wywoływać drgania innych powiązanych z nim elementów.





Naziemne testy helikoptera I - działanie rezonansu

Chinook ground resonance 1 -> Youtube

Naziemne testy helikoptera II - działanie rezonansu

Chinook ground resonance 2 -> Youtube

Czy śpiew może zaszkodzić ?

Drgania kieliszka -> Youtube Drgania wywołane głosem 2 -> Youtube

Występowanie rezonansu - drgania w samolotach

Drgania samoloty 1 -> Youtube   Drgania samoloty 2 -> Youtube

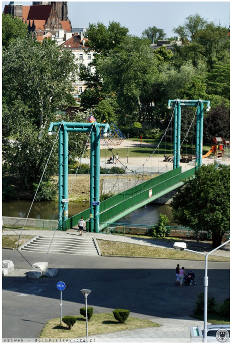
Układy ciągłe a układy dyskretne - różnica

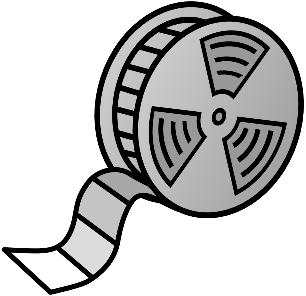
Bardzo ważna uwaga: większość obiektów z jakimi się spotykamy są układami ciągłymi o nieskończonej liczbie swobody. Skutkuje to nieskończoną liczbą częstości rezonansowych. Nie wystarczy więc od jednego uciec ...

▸ Płyta - wiele form drgań -> Youtube

Zabezpieczanie przed rezonansem

W niektórych przypadkach możliwe jest wykorzystanie wykorzystanie tzw. tłumika dynamicznego którego częstość pokrywa się z częstością rezonansową chronionej konstrukcji. Przykład z "naszego" podwórka - Kładka Żabia/Bielarska.

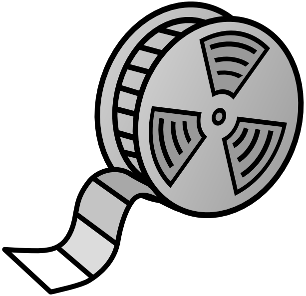




Żabia kładka - tłumik dynamiczny

Kolejny "tańczący most"

Jak widać zagadnienie jest wciąż aktualne i pojawia się dość często.



i jeszcze jeden:

Kładka

Zakończenie

Dziękuję za uwagę i proszę o pytania.